

# Hochfrequenztechnik

## Vorlesung

Prof.Dipl.-Ing. K.-H. Rathsmann

Teilgebiet:  
**Synthese von Reaktanzfiltern**

Mitschrift Andreas Hagedorn

**WS 2000/2001**

**(keine Gewähr auf Vollständigkeit und Richtigkeit)**

Hochfrequenztechnik .....	1
Synthese von Reaktanzfiltern .....	3
Einführung .....	3
Vorbemerkung .....	3
Vergleich Netzwerkanalyse und Netzwerksynthese .....	3
Filterentwurfsverfahren .....	3
Übersicht über die Aufgabenstellung bei der Filtersynthese .....	4
Approximationsproblem .....	5
Realisierbarkeitsproblem .....	5
Betriebsparameter .....	5
Betriebsübertragungsfunktion (BÜF) .....	5
Eingangsreflexionsfaktor .....	6
Zwischenbilanz .....	7
Zwischenkapitel: Rationale Funktion (r.F.) .....	8
1. Ganze rationale Funktion (Polynom/Potenzreihe) .....	8
2. Gebrochen rationale Funktion .....	8
3. Rationale reelle Funktion (r.r.F.) .....	8
4. Positive reelle Funktion (p.r.F.) .....	8
Normierung .....	9
1. komplexe Frequenz .....	9
2. Impedanzen .....	9
Normierungsgleichung: .....	10
Entnormierungsgleichung: .....	10
Approximationsprobleme .....	11
Butterworth-Approximation .....	11
Eingangsreflexionsfaktor .....	14
Tschebyscheff-Approximation .....	14
Frequenztransformation .....	20
Die Tiefpass-Hochpass-Transformation .....	20
Tiefpass-Bandpass-Transformation .....	22
Zusammenfassung: .....	24
Grenzfrequenzen / Bandbreite .....	24
Normierung .....	26
Aufgabe 1: Tschbyscheff-Tiefpassfilter .....	27
Aufgabe 2: Tschbyscheff-Hochpassfilter .....	28
Aufgabe 3: Tschbyscheff-Bandpassfilter .....	29

# Synthese von Reaktanzfiltern

## Einführung

### Vorbemerkung

Ein elektrisches Filter ist ein 2-Tor mit einer frequenzabhängigen Übertragungsfunktion (ÜF), die es ermöglicht, Signale erwünschter Frequenzen möglichst verlustarm zu übertragen und gleichzeitig Signale unerwünschter Frequenzen zu unterdrücken.

Filter werden in allen Bereichen der Elektrotechnik eingesetzt. Insbesondere auch in der HF-Technik → fundamentale<sup>1</sup> Bedeutung.

### Vergleich Netzwerkanalyse und Netzwerksynthese

Netzwerkanalyse → Netzwerk gegeben (d.h. Schaltungsstruktur → Topologie und Werte der Bauelemente) → Netzwerkfunktion gesucht

- a) Übertragungsfunktion (z.B. Ausgangsspg./ Eingangsspg.)
- b) Zweipolfunktionen (z.B. Eingangswiderstand)

Netzwerksynthese → Umkehrung der Problemstellung, d.h. es wird ein Netzwerk gesucht (Topologie u. Bauelementwerte), das auf eine bestimmte Erregung in vorbestimmte Weide reagieren soll. D.h. es wird ein Netzwerk mit vorgegebenen Eigenschaften gesucht z.B. mit einer ganz bestimmten ÜF. Netzwerksynthese ist im allgemeinen schwieriger als Netzwerkanalyse.

### Filterentwurfsverfahren

Unterscheidung zwischen den Verfahren nach der

- Wellenparametertheorie (engl: image parameter theory) älteres Verfahren → in Analogie zur Leitungstheorie Benutzung von Wellenparametern (z.B. Wellenwiderstand) → Nachteil: Betriebsbedingungen (Innenwiderstand der Quelle u. Lastwiderstand) werden beim Entwurf nicht berücksichtigt. → Beide beeinflussen jedoch die Übertragungscharakteristik.
- Betriebsparametertheorie (engl: insertion loss theory / exact network theory) Betriebsbedingungen werden von Anfang an berücksichtigt (Innen- u. Lastwiderstand) → exaktes Syntheseverfahren

Filter werden von NF- bis zu höchstem HF-Bereich betrieben → unterschiedlichste technologische Realisierung.

NF → diskrete<sup>2</sup> / konzentrierte<sup>3</sup> Bauelemente → mit zunehmender Frequenz → parasitäre<sup>4</sup> Effekte (Streukapazität u. Zuleitungsinduktivität) Daher bei

MW → (Mikrowellenfrequenzen) → Leitungsfiler

Jeder Filterentwurf (NF – oder MW-Filter) beginnt mit dem Entwurf der Betriebsparametertheorie.

<sup>1</sup> **Fundamental** (lat.), grundlegend; schwerwiegend.

<sup>2</sup> **diskret** (lat.) *Physik, Math.* abgegrenzt, getrennt

<sup>3</sup> **konzentriert** *Chemie*, angereichert; gehaltreich; gesammelt; aufmerksam

<sup>4</sup> **parasitär** (franz.) schmarotzerhaft; durch Schmarotzer hervorgebracht

## Übersicht über die Aufgabenstellung bei der Filtersynthese

Wir können uns auf sogenannte Tiefpaß-Filter (Abkürzung: TP engl: low pass filter) beschränken, da der Entwurf von

- Hochpass (Abkürzung: HP engl: high pass filter)
- Bandpass (Abkürzung: BP engl: band pass filter)
- Bandsperre (Abkürzung: BS engl: band stop filter)

Auf einem normierten TP (TP-Prototype) zurückgeführt wird. Für den Betrag (Amplitudengang) bzw. das Betragsquadrat der Betriebsübertragungsfunktionen eines idealen Tiefpass gilt:

$$|\underline{S}_{21}(j\omega)|^2 = \begin{cases} A_0 > 0 & \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_g \\ 0 & \text{für } \omega > \omega_g \end{cases}$$

$f_g$  Grenz- oder Eckfrequenz (engl:  $f_c$  cutt off frequency)

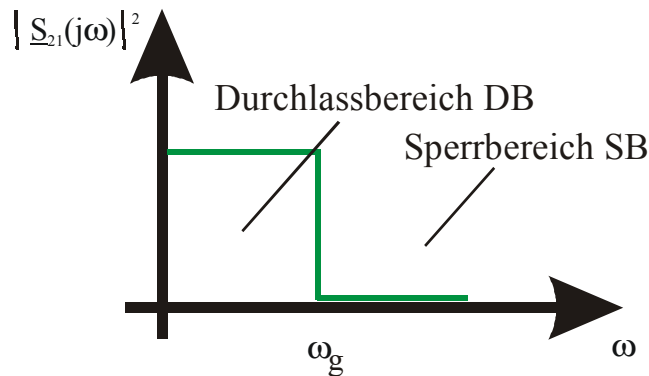


Abbildung 1: idealer Tiefpass

Idealer Tiefpasscharakteristik → keine rationale Funktion → daher auch mit noch so großem Aufwand nicht exakt realisierbar → Angabe eines Toleranzschemas.

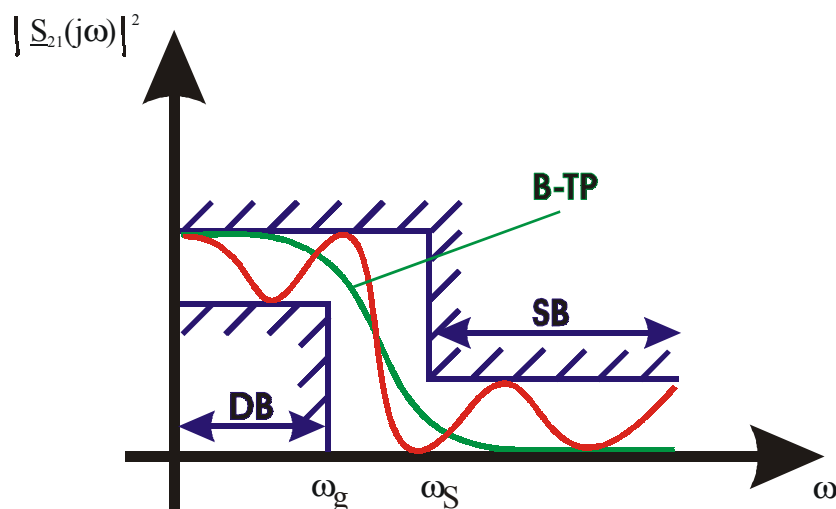


Abbildung 2: Tiefpass Toleranzschema

B-TP Butterworth-Tiefpass

C-TP Cauer-Tiefpass

HF-V

Durch die Wahl einer Betriebsübertragungsfunktion, die das Toleranzschema einhält, wird also der Verlauf der idealen Tiefpasscharakteristik angenähert (approximiert).

**Approximationsproblem**

Die Einhaltung des Toleranzschemas ist aber nicht das einzige Kriterium bei der Wahl der Betriebs-ÜF. Vielmehr muss diese auch durch eine Schaltung der gewünschten Art (hier: LC-Filter) realisierbar sein →

**Realisierbarkeitsproblem**

Die Betriebs-ÜF muss also beide Aufgaben gleichzeitig erfüllen.

Als bekannt vorausgesetzt wird:

- komplexe Frequenz ( $\rho = \sigma + j\omega$ ) siehe z.B: Laplace-Transformation (Regelungstechnik)
- Pol- u. Nullstellenschema

06.12.2000

**Betriebsparameter**

= Betriebsübertragungsgrößen

**Betriebsübertragungsfunktion (BÜF)**

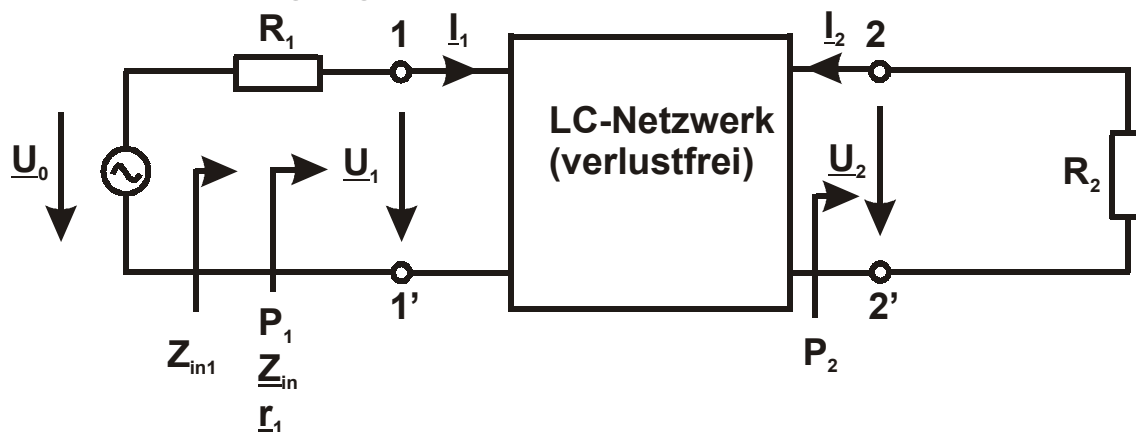


Abbildung 3: LC-Netzwerk (verlustfrei)

$P_1$  = vom Generator mit dem Innenwiderstand  $R_1$  an die Klemmen 1-1' gelieferte Wirkleistung

$P_{1max}$  = maximal (verfügbare) Wirkleistung des Generators (für  $Z_{in}=R_1$ )

$P_2$  = an die Klemmen 2-2' gelieferte Wirkleistung = in  $R_2$  verbrauchte Wirkleistung

Def.:

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_{1max}}$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}, \quad P_{1max} = \frac{U_0^2}{U \cdot R_1} \rightarrow |S_{21}(j\omega)|^2 = 4 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{U_2^2}{U_0^2} \rightarrow$$

$$|S_{21}(j\omega)| = 2 \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{U_2}{U_0}}$$

$S_{21}(j\omega)$ =Betriebsübertragungsfunktion

Wegen  $0 \leq P_2 \leq P_{1max} \rightarrow 0 \leq |S_{21}(j\omega)| \leq 1$

### Eingangsreflexionsfaktor

Leitungstheorie  $\rightarrow$

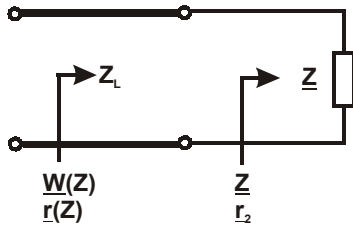


Abbildung 4: Leitungstheorie

$$r_2 = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} \quad \text{bzw.} \quad r(Z) = \frac{W(Z) - Z_L}{W(Z) + Z_L}$$

Wir wählen als Bezugswiderstand  $R_1$  (statt  $Z_L$ ) und definieren in Anlehnung an die Leitungstheorie den Eingangsreflexionsfaktor  $r_1$ :

$$r_1(j\omega) = \frac{Z_{in}(j\omega) - R_1}{Z_{in}(j\omega) + R_1}$$

$$\rightarrow r_1 \cdot Z_{in} + r_1 \cdot R_1 = Z_{in} - R_1 \rightarrow R_1(1 + r_1) = Z_{in}(1 - r_1) \rightarrow$$

$$\frac{Z_{in}(j\omega)}{R_1} = \frac{1 + r_1(j\omega)}{1 - r_1(j\omega)}$$

Allgemein gilt

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$$

$$X_{in} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{---} \blacksquare \text{---}$$

$$X_{in} < 0 \quad \rightarrow \quad \text{---} \text{||} \text{---}$$

$$|r_1(j\omega)|^2 = \frac{|Z_{in}(j\omega) - R_1|^2}{|Z_{in}(j\omega) + R_1|^2} = \frac{|R_{in} + jX_{in} - R_1|^2}{|R_{in} + jX_{in} + R_1|^2} = \frac{(R_{in} - R_1)^2 + X_{in}^2}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2} = \frac{R_{in}^2 - 2R_{in}R_1 + R_1^2 + X_{in}^2}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2}$$

Zusammengefaßt

$$|r_1(j\omega)|^2 = \frac{R_{in}^2 - 2R_{in}R_1 + R_1^2 + X_{in} + 2R_{in}R_1 - 2R_{in}R_1}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2} = \frac{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in} - 4R_{in}R_1}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2}$$

Erweitert

$$|r_1(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4R_{in}R_1}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2} \cdot \frac{U_0^2}{U_0^2} = 1 - \frac{U_0^2}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2} \cdot \frac{R_{in}}{U_0^2 / 4R_1} = 1 - \left( \frac{U_0}{|Z_{in1}|} \right)^2 \frac{R_{in}}{P_{1max}}$$

$$|Z_{in}|^2 = R_{in}^2 + X_{in}^2$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + Z_{in}} = \frac{U_0}{(R_{in} + R_1) + jX_{in}}$$

$$|I_1|^2 = I_1^2 = \frac{|U_0|^2}{(R_{in} + R_1)^2 + X_{in}^2} = \frac{|U_0|^2}{|Z_{in1}|^2}$$

$$|r_1(j\omega)|^2 = 1 - \frac{I_1^2 \cdot R_{in}}{P_{1max}} = 1 - \frac{P_1}{P_{1max}}$$

$P_2 = P_1$  für verlustfreie Vierpole  $\rightarrow$

$$|r_1(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_2}{P_{1max}} = |S_{21}(j\omega)|^2$$

$$\boxed{|r_1(j\omega)|^2 + |S_{21}(j\omega)|^2 = 1}$$

Allgemein für verlustfreie Vierpole gültig!

$$\text{Wegen } 0 \leq |S_{21}(j\omega)|^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq |r_1(j\omega)|^2 \leq 1$$

Anmerkung:

$$|r_1|^2 = 1 - \frac{P_1}{P_{1max}} = \frac{P_{1max} - P_1}{P_{1max}} = \frac{P_{1refl.}}{P_{1max}}$$

$$r_1 = \frac{Z_{in} - R_1}{Z_{in} + R_1} \rightarrow \text{bei Leistungsanpassung d.h. für } Z_{in} = R_1 \rightarrow r_1 = 0$$

### Zwischenbilanz

$$\text{Geg.: } |S_{21}|^2 \rightarrow |I_1|^2 = 1 - |S_{21}|^2$$

Andererseits gilt

$$\frac{Z_{in}}{R_1} = \frac{1 + r_1}{1 - r_{11}}$$

$Z_{in}$  ist Zweipolfunktion → Hieraus kann man relativ einfach, eine Schaltung „ablesen“.

Es verbleibt noch das Problem:  $|r_1|^2 \rightarrow r_1$

Bestimmung von  $Z_{in}$  aus  $|S_{21}|^2$  reduziert auf das Problem: Bestimmung von  $r_1$  aus  $|r_1|^2$ .

13.12.2000

## Zwischenkapitel: Rationale Funktion (r.F.)

### 1. Ganze rationale Funktion (Polynom/Potenzreihe)

$$f(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n$$

$a_1 \dots a_n \rightarrow$  konstante Koeffizienten

$n \rightarrow$  Grad des Polynoms ( $n$  ganz ;  $a_n \neq 0$ )

Beispiel:  $f(p) = a_0 + a_1 p$   
 $f(p) = p^n$

### 2. Gebrochen rationale Funktion

$$f(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$$

$a_1 \dots a_m \ b_1 \dots b_n \rightarrow$  konstante Koeffizienten

$n \rightarrow$  Grad des Polynoms ( $n$  ganz ;  $a_n \neq 0$ )

Beispiel:  $f(p) = \frac{1}{p}$

Auftretene Rechenoperationen bei 1 u. 2 → nur Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division.

### 3. Rationale reelle Funktion (r.r.F.)

Eine rationale reelle Funktion ist eine rationale Funktion, die für reelle Werte von  $p$  (d.h. für  $p = \sigma$ ) reell ist.

Also:  $f(p)$  reell für reelle  $p$  ( $p = \sigma$ )

(D.h., auch die Koeffizienten der Polynome müsse reell sein!)

### 4. Positive reelle Funktion (p.r.F.)

Eine positive reelle Funktion ist eine rationale Funktion, die für reelle Werte von  $p$  (d.h. für  $p = \sigma$ ) reell ist und deren Realteil für alle Werte von  $p$  positiv ist.

Also:  $f(p)$  reell für reelle  $p$  ( $p = \sigma$ )

$\text{Re}\{f(p)\} \geq 0$  für  $\text{Re}\{p\} \geq 0$  ( $p = \sigma$ )

(Auch hier müssen die Koeffizienten der Polynome reell sein.)

Eine Zweipolfunktion (z.B. Eingangswiderstand) aus R, L, C, Ü (Übertrager) ist stets eine p.r.F.!)

Wie gewinne ich nun  $Z_{in}(j\omega)$  aus  $|S_{21}(j\omega)|^2$ ?

$$|S_{21}(j\omega)|^2 \rightarrow |r_1(j\omega)|^2 \rightarrow r_1(j\omega) \rightarrow Z_{in}(j\omega)$$

Es verbleibt die Bestimmung von  $r_1(j\omega)$  aus  $|r_1(j\omega)|^2$ !

Es gilt:  $|E(j\omega)|^2 = E(j\omega) \cdot E^*(j\omega) = E(j\omega) \cdot E(-j\omega)$



Beispiel:

$$\underline{Z}(j\omega) = R + jX \rightarrow |\underline{Z}(j\omega)|^2 = R^2 + X^2 = (R+jX)(R-jX) = \underline{Z}(j\omega) \cdot \underline{Z}^*(j\omega) = \underline{Z}(j\omega) \cdot \underline{Z}(-j\omega)$$

Somit folgt auch aus:

$$|\underline{r}_1(j\omega)|^2 = 1 - |\underline{S}_{21}(j\omega)|^2 \rightarrow \underline{r}_1(j\omega)\underline{r}_1(-j\omega) = 1 - \underline{S}_{21}(j\omega)\underline{S}_{21}(-j\omega)$$

Übergang  $j\omega \rightarrow p \Rightarrow r_1(p)r_1(-p) = 1 - \underline{S}_{21}(p)\underline{S}_{21}(-p)$

Jetzt kennen wir das Produkt von  $r_1(p)r_1(-p)$ :

$$r_{\underline{1}}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{in}(j\omega) - R_1}{\underline{Z}_{in}(j\omega) + R_1} = \frac{1 - \frac{R_1}{\underline{Z}_{in}(j\omega)}}{1 + \frac{R_1}{\underline{Z}_{in}(j\omega)}}$$

Wir fordern von  $\underline{Z}_{in}(j\omega)$ , dass die Funktion eine Zweipolfunktion, d.h. eine positive rationale Funktion sein soll.

Mit Hilfe der Funktionentheorie lässt sich zeigen:

Ist  $f(p)$  eine p.r.F., dann ist auch  $f(p) = \frac{1 - f(p)}{1 + f(p)}$ , eine p.r.F.. Hier  $f(p) = \frac{R_1}{\underline{Z}_{in}(p)} \left( = \frac{Y_{in}(p)}{G_1} \right)$

$f(p) = r_1(p)$ . Somit ist auch  $r_1(p)$  eine p.r.F..

Für  $r_1(p)$  kann man daher allgemein schreiben:

$$r_{\underline{1}}(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Zerlegung in Linearfaktoren  $\rightarrow$

$$r_{\underline{1}}(p) = k \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{(p - p_{001})(p - p_{002}) \dots (p - p_{00m})}$$

Damit:

$$r_{\underline{1}}(-p) = k \frac{(-p - p_{01})(-p - p_{02}) \dots (-p - p_{0m})}{(-p - p_{001})(-p - p_{002}) \dots (-p - p_{00m})} = k \frac{(-1)^m (p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{(-1)^n (p - p_{001})(p - p_{002}) \dots (p - p_{00m})}$$

$$\frac{(-1)^m}{(-1)^n} = (-1)^{m-n}$$

Somit folgt für  $r_{\underline{1}}(p)r_{\underline{1}}(-p) = (-1)^k \frac{(p^2 - p_{01}^2)(p^2 - p_{02}^2) \dots (p^2 - p_{0m}^2)}{(p^2 - p_{001}^2)(p^2 - p_{002}^2) \dots (p^2 - p_{00m}^2)}$

20.12.2000


## Normierung

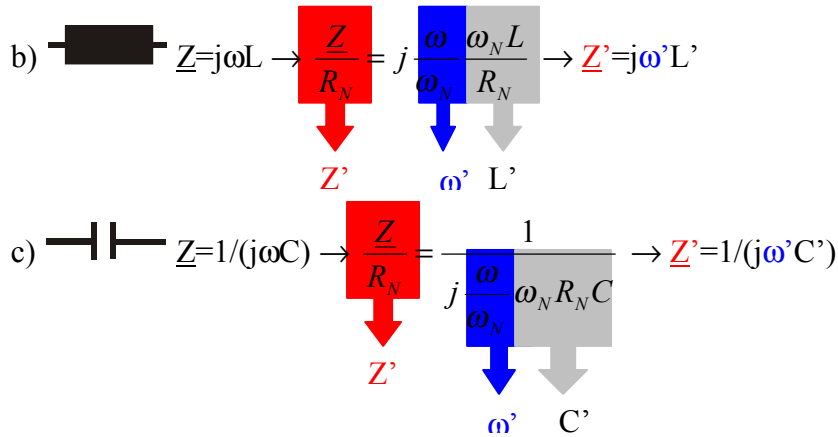
$\rightarrow$  dimensionslos

### 1. komplexe Frequenz

$$\rho = \sigma + j\omega \rightarrow \frac{\rho}{\omega_N} = \frac{\sigma}{\omega_N} + \frac{\omega}{\omega_N} \rightarrow \rho' = \sigma' + j\omega'$$

### 2. Impedanzen

a)   $\underline{Z} = R \rightarrow \frac{\underline{Z}}{R_N} = \frac{R}{R_N} \rightarrow \underline{Z}' = R'$



Entsprechend:  $\underline{Z} = p L$  usw

**Normierungsgleichung:**

$p' = \frac{p}{\omega_N}$	$\sigma' = \frac{\sigma}{\omega_N}$	$\omega' = \frac{\omega}{\omega_N}$
$R' = \frac{R}{R_N}$	$L' = \frac{\omega_N L}{R_N}$	$C' = \omega_N R_N C$

**Entnormierungsgleichung:**

$p = \omega_N p'$	$\sigma = \omega_N \sigma'$	$\omega = \omega_N \omega'$
$R = R_N R'$	$L = \frac{R_N L'}{\omega_N}$	$C = \frac{C'}{\omega_N R_N}$

- $\omega_N$  = normierende Frequenz
- $R_N$  = normierende Frequenz
- $\omega'$  = normierte Frequenz
- $R'$  = normierte Frequenz
- usw

Es ist zweckmäßig,

$\omega_N = \omega_g$  (Grenzfrequenz des TP)

und

$R_N = R_1$  (siehe  $\frac{Z_{in}}{R_1} = \frac{1+r_1}{1-r_1}$ )

zu wählen.

## Approximationsprobleme

Problemstellung:

Die ideale TP-Charakteristik kann durch kein auch noch so aufwendiges Netzwerk exakt realisiert werden. Daher Approximation durch eine rationale Funktion unter Einhaltung der vorgegebenen Toleranzgrenzen.

Es sind aus der Literatur einige rationale Funktionen (Polynome) bekannt, welche diese Bedingungen erfüllen.

z.B.:

Butterworth-Filter	}	Approx. von $ S_{21} ^2$
Tschebyscheff-Filter (Chebycheff)		
Cauer-Filter (Elliptische-Filter)		
Bessel-Filter		Approx. der Phase

Allgemeiner Ansatz für Approximationsfunktion:

$$f(\omega'^2) = \frac{1}{1 + A_n(\omega'^2)}$$

$A_n(\omega'^2) \rightarrow$  charakteristische Funktion

$$A_n(\omega'^2) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \omega' \leq 1 & \text{(DB)} \\ 0 & \text{für } \omega' > 1 & \text{(SB)} \end{cases}$$

## Butterworth-Approximation

$$A_n(\omega'^2) = (\omega'^2)^n = \omega'^{2n}$$

$$|S_{21}(j\omega')|^2 = \frac{a_0}{1 + \omega'^{2n}}$$

$a_0 =$  Amplitudenfaktor

Bestimmung von  $a_0$ :

$$a_0 = |S_{21}(0)|^2$$

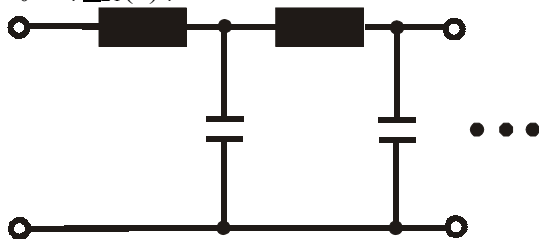


Abbildung 5: LC-TP prinzipiell

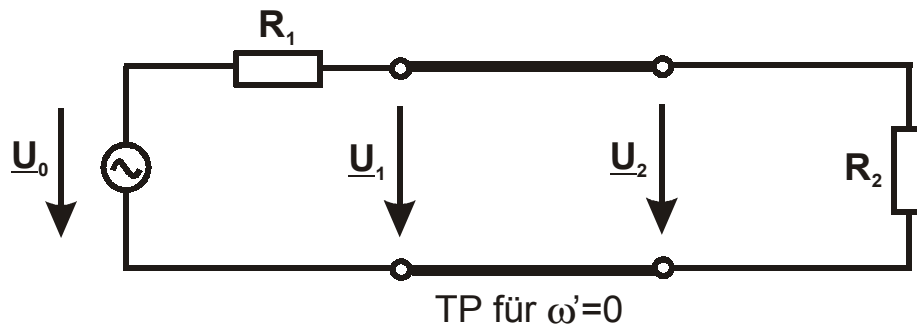


Abbildung 6: Ersatzschaltbild für den TP bei  $\omega'=0$  (Gleichstrom)

Es war

$$\underline{S}_{21}(j\omega') = 2 \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0}$$

für  $\omega'=0$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} \rightarrow \underline{S}_{21}(0) = 2 \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$a_0 = |\underline{S}_{21}(0)|^2 = 4 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = 4 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

a)  $R_2 \geq R_1$ :

$$a_0 = 4 \cdot \frac{R_1/R_2}{\left(1 + R_1/R_2\right)^2} = 4 \cdot \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \quad \text{mit } \rho = R_1/R_2 \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

b)  $R_2 < R_1$ :

$$a_0 = 4 \cdot \frac{R_2/R_1}{\left(1 + R_2/R_1\right)^2} = 4 \cdot \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \quad \text{mit } \rho = R_2/R_1 \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

$$a_0 = 4 \cdot \frac{\rho}{(1 + \rho)^2}$$

$$\text{mit } \rho = \begin{cases} R_1/R_2 & \text{mit } R_2 > R_1 \\ R_2/R_1 & \text{mit } R_1 > R_2 \end{cases}$$

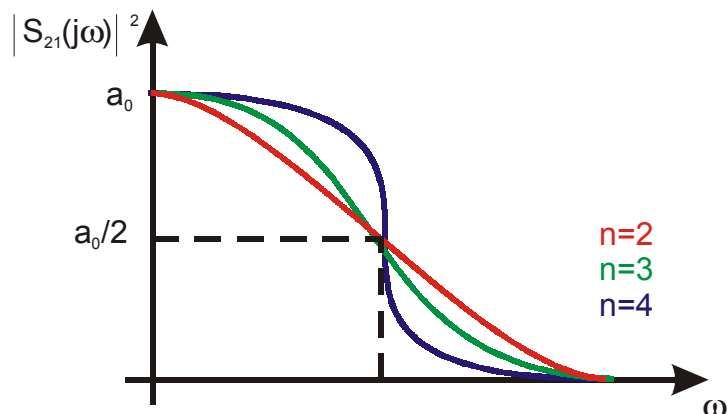


Abbildung 7: verschiedene n

$$|S_{21}(\omega'=1)|^2 = \frac{a_0}{2} \quad (\text{für alle } n)$$

Bestimmung von  $r_1(p')$  ·  $r_1(-p')$

$$|r_1(j\omega')|^2 = 1 - |S_{21}(j\omega')|^2 = 1 - \frac{a_0}{1 + \omega'^{2n}} = \frac{1 + \omega'^{2n} - a_0}{1 + \omega'^{2n}} = \frac{(1 - a_0) + \omega'^{2n}}{1 + \omega'^{2n}} = \frac{(1 - a_0) + (\omega'^2)^n}{1 + (\omega'^2)^n}$$

$j\omega' \rightarrow p'$  bzw.  $(j\omega')^2 = -\omega'^2 \rightarrow p'^2$  bzw.  $\omega'^2 \rightarrow -p'^2$

Somit:

$$r_1(p') \cdot r_1(-p') = \frac{(1 - a_0) + (-p'^2)^n}{1 + (-p'^2)^n} \rightarrow$$

$$r_1(p') \cdot r_1(-p') = \frac{(1 - a_0) + (-1)^n p'^2}{1 + (-1)^n p'^2}$$

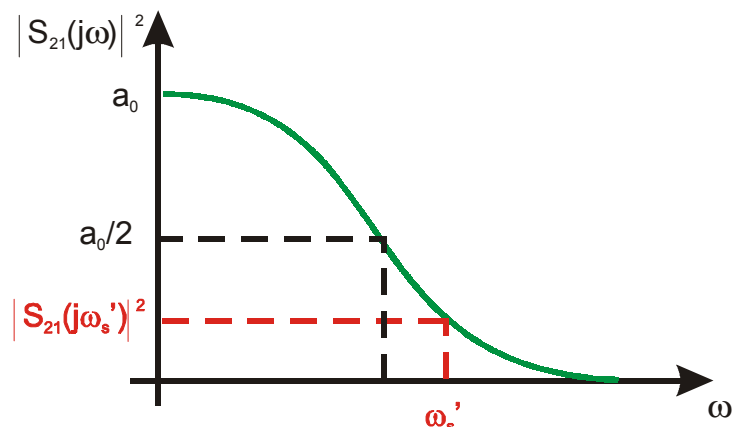
Pol- und Nullstellen gem. Bl 1/018 u. 1/019 →

Daraus dann  $r_1(p')$  →

$$\frac{Z_{in}(p')}{R_1} = \frac{1 + r_1(p')}{1 - r_1(p')}$$

↓  
 $Z_{in}(p')$

Bestimmung von n:



Sperrdämpfung  $a_s$ :

Def.:

$$\frac{a_s}{dB} = 10 \cdot \log \frac{|S_{21}(j\omega')|_{\max}^2}{|S_{21}(j\omega')|_{\min}^2} = 10 \cdot \log \frac{a_0}{\frac{a_0}{1 + \omega_s'^{2n}}} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{a_s}{dB} = 10 \log(1 + \omega_s'^{2n})}$$

10.01.2001

$$\frac{a_s}{dB} = 10 \log(1 + \omega_s'^{2n}) \rightarrow \omega_s'^{2n} = 10^{\frac{a_s/dB}{10}} - 1 \rightarrow \log \omega_s'^{2n} = 2 \cdot n \cdot \log \omega_s' = \log \left( 10^{\frac{a_s/dB}{10}} - 1 \right)$$

$$n \geq \frac{\log \left( 10^{\frac{a_s/dB}{10}} - 1 \right)}{2 \log \omega_s'}$$

$n \rightarrow n_{\text{erforderlich}}$

$n_{\text{gewählt}} \in \mathbb{N}$

### Eingangsreflexionsfaktor

$$|r_1|_{\max}^2 = 1 - |S_{21}|_{\min}^2 = 1 - \frac{a_0}{2} \quad |S_{21}|^2 = \frac{a_0}{2} \text{ für alle } n \text{ im DB}$$

5

$$\rightarrow \text{mit } a_0 = \frac{4\rho}{(1+\rho)^2} \rightarrow \boxed{|r_1|_{\max} = \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho}} \quad |r_1|_{\max} = \text{bei } \omega = \omega_g \quad \text{für alle } n \text{ im DB}$$

$|r_1|_{\max} \rightarrow$  durch  $\rho$  festgelegt!

Beispiel:

$$\rho = 1 \rightarrow$$

$$|r_1|_{\max} = 0,707$$

$$P_{w \text{ refl}} = |r_1|^2 \cdot P_{w \text{ hin}} = 0,5 \cdot P_{w \text{ hin}} \rightarrow 50\% \text{ der Leistung wird reflektiert!}$$

### Tschebyscheff-Approximation

Es war allgemeiner Ansatz

$$f(\omega'^2) = \frac{1}{1 + A_n(\omega'^2)}$$

Tschebyscheff  $\rightarrow$  charakteristische Funktion:

$$A_n(\omega'^2) = \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\omega')$$

$T_n(\omega')$  = Tschebyscheffpolynom 1 Art von der Ordnung  $n$

$\varepsilon$  = Welligkeitsfaktor

<sup>5</sup> max - maximal

min - minimal

Somit:

$$\boxed{|S_{21}(j\omega')|^2 = \frac{A_0}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\omega')}} \quad A_0 = \text{Amplitudenfaktor}$$

Definition der Tschebyscheff-Polynome

Zum besseren Verständnis ist es sinnvoll, zunächst die Funktion

$$T_n = T_n(\omega')$$

in der Parameterdarstellung

$$T_n = \cos n\Phi \text{ mit } \omega' = \cos \Phi \text{ bzw } \Phi = \arccos \omega'$$

zu betrachten ( $\Phi = \text{Par.} / n = N_0$ ).

Diese Parameterdarstellung ist wegen

$$-1 \leq \cos \Phi \leq 1$$

für  $0 \leq |\omega'| \leq 1$  gültig, d.h. für den DB!

$$n=0: \quad T_0 = \cos 0 = 1$$

$$n=1: \quad T_1 = \cos \Phi = \omega'$$

$$n=2: \quad T_2 = \cos 2\Phi = 2\cos^2 \Phi - 1 = 2\omega'^2 - 1$$

$$n=3: \quad T_3 = \cos 3\Phi = 4\cos^3 \Phi - 3\cos \Phi = 4\omega'^3 - 3\omega'$$

usw

Wählen wir andererseits als Parameterdarstellung

$$T_n = \cosh n\Phi \text{ mit } \omega' = \cosh \Phi \text{ bzw } \Phi = \text{arcosh } \omega'$$

so ist diese wegen

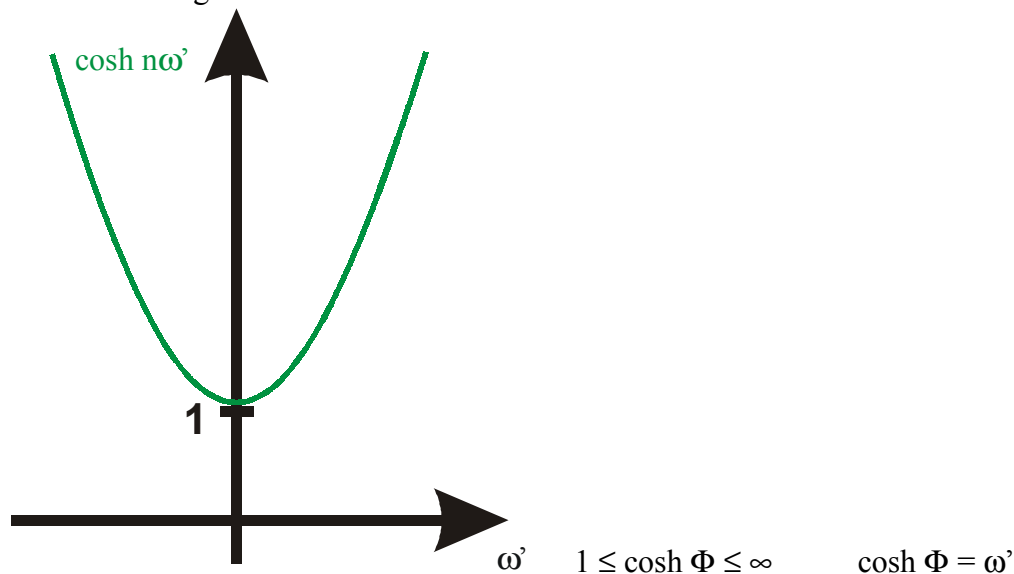


Abbildung 8: Cosinushyperbolicus

für

$$|\omega'| \geq 1$$

gültig, d.h. für den Sperrbereich !

$$n=0: \quad T_0 = \cos 0 = 1$$

$$n=1: \quad T_1 = \cos \Phi = \omega'$$

$$n=2: \quad T_2 = \cos 2\Phi = \sinh^2 \Phi + \cosh^2 \Phi = \cosh^2 \Phi - 1 + \cosh^2 \Phi = 2 \cosh^2 \Phi - 1 = 2 \omega'^2 - 1$$

$$n=3: \quad T_3 = \cos 3\Phi = 4\cosh^3 \Phi - 3\cosh \Phi = 4 \omega'^3 - 3\omega'$$

usw

Aus den beiden unterschiedlichen Parameterdarstellungen mit unterschiedlichen Gültigkeitsbereich erhält man also die gleiche Parameterfreie Darstellung, die uneingeschränkt gültig ist!

Es lässt sich also mit

$$\omega' = \cos \Phi \quad (0 \leq |\omega'| \leq 1)$$

bzw

$$\omega' = \cosh \Phi \quad (|\omega'| \geq 1)$$

schreiben:

$$T_n(\omega') = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos \omega') & (0 \leq |\omega'| \leq 1) \quad \text{DB} \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh} \omega') & (|\omega'| \geq 1) \quad \text{SB} \end{cases}$$

Rekursionsformel:

$$T_n(\omega') = 2 \cdot \omega' \cdot T_{n-1}(\omega') - T_{n-2}(\omega') \quad \text{mit } n = 2, 3, \dots$$

$T_0 \dots T_3 \rightarrow$  s.o. !

Fortsetzung:

$$T_4(\omega') = 2 \cdot \omega' \cdot (4\omega'^3 - 3\omega') - (2\omega'^2 - 1) = 8\omega'^4 - 6\omega'^2 - 2\omega'^2 + 1 = 8\omega'^4 - 8\omega'^2 + 1$$

$$T_5(\omega') = 16\omega'^5 - 20\omega'^3 + 5\omega'$$

$$T_6(\omega') = 32\omega'^6 - 48\omega'^4 + 18\omega'^2 - 1$$

Tschbyscheff-Polynome  $\rightarrow$  siehe Blatt 1/017

Im Durchlassbereich gilt für alle n:

$$|S_{21}(j\omega')|^2 = \frac{A_0}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n(\omega')^2} = A_0$$

Andererseits war

$$0 \leq |S_{21}(j\omega')|^2 \leq 1 \quad \boxed{A_0 \leq 1}$$

	gerade n		ungerade n	
	$\omega'=0$	$\omega'=1$	$\omega'=0$	$\omega'=1$
$T_n^2(\omega')$	1	1	0	1
$ S_{21}(j\omega) ^2$	$\frac{A_0}{1 + \varepsilon^2}$	$\frac{A_0}{1 + \varepsilon^2}$	$A_0$	$\frac{A_0}{1 + \varepsilon^2}$

$$|S_{21}(j\omega')|^2_{\min} = \frac{A_0}{1 + \varepsilon^2 T_n(\omega')^2} \quad \text{siehe Blatt 1/013 und 1/014}$$

Welligkeit

Definition:



$$\frac{w}{dB} = 10 \lg \frac{|S_{21}(j\omega)|_{\max}^2}{|S_{21}(j\omega)|_{\min}^2} = 10 \lg \frac{A_0}{\frac{A_0}{1 + \epsilon^2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{w}{dB} = 10 \lg(1 + \epsilon^2)}$$

Beispiel:

$$\epsilon = 0,3493 \rightarrow w = 0,5 \text{ dB} \quad (\text{vergleiche Blatt 1/007 !})$$

Bestimmung von  $A_0$ :

$$T_n^2(0) = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n \\ 0 & \text{für ungerade } n \end{cases} \rightarrow$$

$$|S_{21}(0)|^2 = \begin{cases} \frac{A_0}{1 + \epsilon^2} & \text{für gerade } n \\ A_0 & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Ersatzschaltbild für den Tiefpass bei  $\omega' = 0$  wie bei der Butterworth-Approximation!

Daher gilt auch

$$|S_{21}(0)|^2 = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2} \quad \text{mit } \rho = \begin{cases} \frac{R_1}{R_2} & \text{für } R_1 < R_2 \\ \frac{R_2}{R_1} & \text{für } R_2 < R_1 \end{cases}$$

Somit ergibt sich

a) gerade  $n$ :

$$\frac{A_0}{1 + \epsilon^2} = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2} \rightarrow \boxed{A_0 = \frac{4\rho(1 + \epsilon^2)}{(1 + \rho)^2}} \quad 0 \leq \rho < 1 \quad \rho \neq 1 ! \text{ (siehe unten)}$$

abhängig von  $\rho$  und  $\epsilon$  !

b) ungerade  $n$ :

$$\boxed{A_0 = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2}} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (\text{vergleiche Butterworth-Approximation})$$

Sonderfall  $\rho = 1$  (d.h.  $R_1 = R_2$ )

a) gerade  $n$ :

$$|A_0 = 1 + \epsilon^2 > 1|$$

Andererseits gilt

$$|S_{21}(j\omega)|^2_{\max} = A_0 \quad \text{und} \quad 0 \leq |S_{21}(j\omega)|^2 \leq 1 \rightarrow |A_0 \leq 1|$$

Beide Aussagen stehen im Widerspruch zueinander → Der Fall  $A_0=1$  gerade  $n$  ist nicht existent.

b) ungerade  $n$ :

$$A_0 = 1$$

17.01.2001

Bestimmung von  $n$  :

Für den SB  $|\omega'| \geq 1$  war  $T_n(\omega') = \cosh(n \operatorname{arcosh} \omega') \rightarrow n \operatorname{arcosh} \omega' = \operatorname{arcosh} T_n(\omega') \rightarrow$

$$n = \frac{\operatorname{ar} \cosh T_n(\omega')}{\operatorname{ar} \cosh \omega'} \quad |\omega'| \geq 1 \rightarrow \text{SB}$$

Wegen

$$\operatorname{ar} \cos x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{ar} \cos x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

folgt auch

$$n = \frac{\pm \ln [T_n(\omega') + \sqrt{T_n^2(\omega') - 1}]}{\pm \ln [\omega' + \sqrt{\omega'^2 - 1}]}$$

Es gilt auch

$$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x \rightarrow$$

$$n = \frac{\lg [T_n(\omega') + \sqrt{T_n^2(\omega') - 1}]}{\lg [\omega' + \sqrt{\omega'^2 - 1}]}$$

für  $\omega' \geq 1 \rightarrow \text{SB} \rightarrow T_n(\omega')=1$  erfüllt

$T_n(\omega')$  noch unbekannt

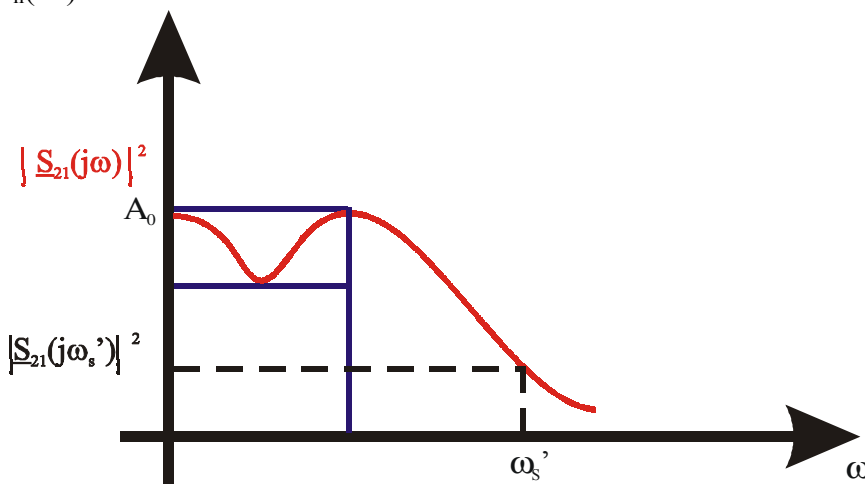


Abbildung 9: Sperrdämpfung

Sperrdämpfung:

Definition:  $\frac{a_s}{dB} \stackrel{\leq}{\min} = 10 \lg \frac{|S_{21}(j\omega')|_{\max}^2}{|S_{21}(j\omega_s')|^2} = 10 \lg \frac{A_0}{\frac{A_0}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\omega_s')}}} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\omega_s'))$

$$\varepsilon^2 \cdot T_n^2(\omega_s') = 10^{\frac{a_s/dB}{10}} - 1$$

$$T_n(\omega_s') \stackrel{erf}{=} \frac{\sqrt{10^{\frac{a_s/dB}{10}} - 1}}{\varepsilon^{gew}} \quad 6$$

**Maximaler** Eingangreflexionsfaktor im DB

$$|r_1(j\omega)|_{\max}^2 = 1 - |S_{21}(j\omega')|_{\min}^2$$

$$|S_{21}(j\omega')|_{\min}^2 = \frac{A_0}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{für alle } n$$

(DB!)

$$|r_1(j\omega')|_{\max}^2 = 1 - \frac{A_0}{1 + \varepsilon^2}$$

a) gerade n:

$$A_0 = \frac{4\rho(1 + \varepsilon^2)^2}{(1 + \rho)^2} \quad 0 \leq \rho < 1 \quad \rho \neq 1$$

$$|r_1(j\omega)|_{\max}^2 = 1 - \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2} \quad \rightarrow \text{nach kürzen}$$

Rechnung:  $|r_1(j\omega)|_{\max}^2 = \frac{(1 - \rho)}{(1 + \rho)}$   $\rho \neq 1$

b) ungerade n:

$$A_0 = \frac{4\rho}{(1 + \rho)} \rightarrow |r_1(j\omega)|_{\max}^2 = 1 - \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2(1 + \varepsilon^2)}$$

Sonderfall  $\rho=1$  nur für ungerade n existent

$$|r_1(j\omega)|_{\max}^2 = 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)} = \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \quad \rho = 1 \text{ und ungerade } n$$

$$|r_1(j\omega)|_{\max} \stackrel{zul}{\geq} \frac{\varepsilon_{erf}}{\sqrt{1 + \varepsilon_{erf}^2}} \quad 7$$

$$\varepsilon_{erf} \leq \frac{|r_1(j\omega')|_{\max zul}}{1 - |r_1(j\omega')|_{\max zul}^2} \quad \rho = 1 \text{ und ungerade } n$$

<sup>6</sup> min – minimal  
max- maximal  
erf – erforderlich  
gew - gewählt  
<sup>7</sup> zul – zulässig  
erf -erforderlich

$$w = 0,25 \text{ dB} \rightarrow \varepsilon = 0,2434 \rightarrow |\underline{L}_1|_{\max} = 0,2365 \rightarrow P_{\text{refl. max}} \approx 5,6\%$$

24.01.2001

### Frequenztransformation

Die bisher für den TP angestellten Betrachtungen können mittels relativ einfacher Frequenztransformationen auf andere Filtertypen übertragen werden. Punkte auf der  $\omega_T$ -Achse für den Tiefpass gehen dabei über in Punkte auf der  $\omega_V$ -Achse für den gewünschten Filtertyp, wobei die zugehörigen Funktionswerte des BÜF  $|S_{21}(j\omega_V)|^2$  erhalten bleiben, d.h.  $|S_{21}(j\omega_T)|^2 \rightarrow |S_{21}(j\omega_V)|^2$

Daraus folgt auch

$$X_T(\omega_T) \rightarrow X_V(\omega_V) \text{ bzw. } B_T(\omega_T) \rightarrow B_V(\omega_V)$$

Invarianz der Reaktanzen bzw Suszeptanzen

$$v = \begin{cases} H \rightarrow HP \\ B \rightarrow BP \\ S \rightarrow BS \end{cases}$$

Beispiele siehe Blatt 1/020 !

### Die Tiefpass-Hochpass-Transformation

Ansatz: Invarianz der Reaktanzen bzw Suszeptanzen



a) 
$$\begin{matrix} L_T \\ X_T \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_H \\ X_H \end{matrix} \quad (1)$$

$$j\omega_T L_T = \frac{1}{j\omega_H L_H} = -j \frac{1}{\omega_H C_H} \rightarrow \omega_T L_T = -\frac{1}{\omega_H C_H} \rightarrow \omega_T = -\frac{1}{\omega_H L_T C_H} \quad (2)$$

Abkürzung:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_T C_H} \quad (3)$$

Durch der vorangegangenen Entwicklung des TP liegt  $L_T$  fest. Daher ist  $C_H$  oder  $\omega_0$  frei wählbar. Es ist zweckmäßig

$$\omega_0 = \omega_{gT} = \omega_g \quad (4)$$

zu wählen.

(4) u. (3) in (2):

$$\omega_T = -\frac{\omega_g^2}{\omega_H} \quad \text{Gleichung für Frequenztransformation} \quad (5)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$C_H = \frac{1}{\omega_g^2 \cdot L_T} \tag{6}$$

Normierung:

$\omega_N = \omega_g \rightarrow$  aus (5):

$$\frac{\omega_T}{\omega_g} = -\frac{\omega_g}{\omega_H} = \frac{1}{\omega_H} \quad \text{mit } \omega'_T = \frac{\omega_T}{\omega_g} \text{ und } \omega'_H = \frac{\omega_H}{\omega_g} \rightarrow$$

$$\omega'_T = \frac{1}{\omega'_H} \tag{7}$$

Es war

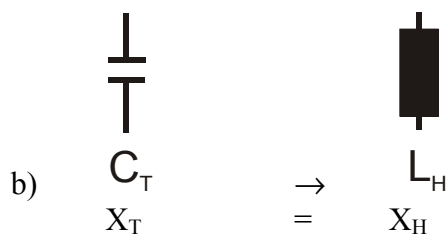
$$L' = \frac{\omega_g L}{R_N} \quad C' = \omega_g R_N C$$

Aus (6)  $\rightarrow$

$$\omega_g C_H = \frac{1}{\omega_g L_T} \cdot R_N \rightarrow$$

$$\omega_g R_N C_H = \frac{R_N}{\omega_g L_T} = \frac{1}{\frac{\omega_g L_T}{R_N}} \rightarrow C'_H = \frac{1}{L'_T} \tag{8}$$

$$\boxed{C_H = \frac{1}{\omega_g R_N L'_T}} \quad \text{entnormiert} \tag{9}$$



$$\frac{1}{j\omega_T C_T} = -j \frac{1}{\omega_T C_T} = j\omega_H L_H \quad \rightarrow \quad \omega_T = -\frac{1}{\omega_H C_T L_H} \quad \omega_0^2 = \omega_g^2 = \frac{1}{L_H C_T}$$

$$\omega_T = -\frac{\omega_g^2}{\omega_H} \quad \text{vergleiche Gleichung (5)}$$

$$L_H = \frac{1}{\omega_g^2 C_T} \quad \text{vergleiche Gleichung (6)}$$

Normierung:  $\omega_N = \omega_g$

$$\omega'_T = -\frac{1}{\omega'_H} \quad \text{vergleiche Gleichung (7)}$$

$$\omega_H L_H = \frac{1}{\omega_g C_T} \cdot \frac{1}{R_N} \rightarrow$$

$$\frac{\omega_g L_H}{R_N} = \frac{1}{\omega_g R_N C_T} \rightarrow L'_H = \frac{1}{C'_T}$$

$L'_H$ 
 $C'_T$

vergleiche Gleichung (8)

bzw

$$L_H = \frac{R_N}{\omega_g C'_T}$$

vergleiche Gleichung (8)

es ist hinreichend, mit positiven Frequenzen zu rechnen

$$\omega_T = \frac{\omega_g^2}{\omega_H} \quad \omega'_T = \frac{1}{\omega'_H}$$

Grenzfrequenz des HP ( $\omega_{gH}$ ):

$$\omega'_{gH} = \frac{1}{\omega'_{gT}} \quad \omega_N = \omega_{gT} = \omega_g \quad \rightarrow \quad \omega'_{gT} = \frac{\omega_{gT}}{\omega_{gT}} = 1$$

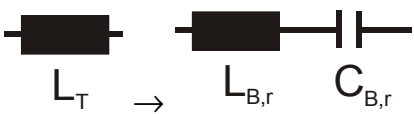
somit

$$\omega'_{gH} = \frac{\omega_{gH}}{\omega_{gT}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{gH} = \omega_{gT}$$

31.01.2001

## Tiefpass-Bandpass-Transformation

Ansatz: Invarianz der Reaktanzen bzw Suszeptanzen  $\rightarrow$  nach Blatt 1/020:

a) 

$$x_T = x_{B,r} \rightarrow j\omega_T L_T = j \left( \omega_B L_{B,r} - \frac{1}{\omega_B C_{B,r}} \right)$$

$x_{B,r}$

Für  $x_{B,r} = 0 \rightarrow \omega_B = \omega_0 \rightarrow$

$$\omega_0 L_{B,r} = \frac{1}{\omega_0 C_{B,r}} = Z_{k,r} \tag{1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_{B,r} C_{B,r}} \rightarrow \tag{2}$$

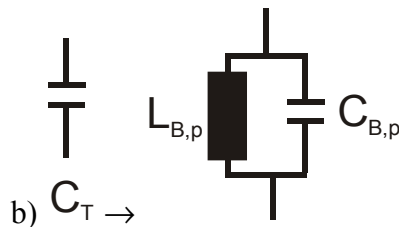
$$\omega_T L_T = \frac{\omega_B}{\omega_0} \underbrace{\omega_0 L_{B,r}}_{Z_{k,r}} - \frac{\omega_{0B}}{\omega_B} \underbrace{\frac{1}{\omega_0 C_{B,r}}}_{Z_{k,r}}$$

$$\omega_T \cdot L_T = \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) \cdot Z_{k,r} = \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) \cdot \omega_0 \cdot L_{B,r} \quad (3)$$

Durch Vergleich  $\rightarrow$   $\omega_T = \omega_0 \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) = \left( \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{\omega_B} \right)$  (4)

$$L_T = L_{B,r} = \frac{1}{\omega_0^2 C_{B,r}} \rightarrow L_{B,r} = L_T \quad (5a)$$

$$C_{B,r} = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L_T} \quad (5b)$$



$$B_T = B_{B,p} \rightarrow j\omega_T C_T = j \underbrace{\left( \omega_B C_{B,p} - \frac{1}{\omega_B L_{B,p}} \right)}_{B_{B,r}}$$

Für  $B_{B,p} = 0 \rightarrow \omega_B = \omega_0 \rightarrow$

$$\omega_0 C_{B,p} = \frac{1}{\omega_0 L_{B,p}} = Y_{k,p} \quad (6)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_{B,p} C_{B,p}} \rightarrow \quad (7)$$

$$\omega_T C_T = \frac{\omega_B}{\omega_0} \underbrace{\omega_0 L_{B,p}}_{Y_{k,p}} - \frac{\omega_{0B}}{\omega_B} \underbrace{\frac{1}{\omega_0 L_{B,p}}}_{Y_{k,p}}$$

$$\omega_T \cdot L_T = \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) \cdot Y_{k,p} = \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) \cdot \omega_0 \cdot C_{B,p} \quad (8)$$

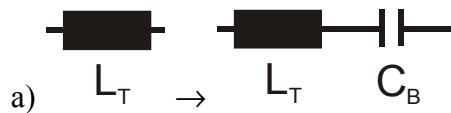
$$\omega_T = \omega_0 \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) = \left( \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{\omega_B} \right) \text{ wie (4)}$$

$$C_T = C_{B,p} = \frac{1}{\omega_0^2 L_{B,p}} \rightarrow C_{B,p} = C_T \quad (9a)$$

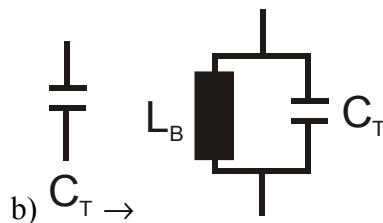
$$l_{B,p} = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_T} \quad (9b)$$

Es verbleiben für den BP  $L_T, C_{B,r}; C_T; L_{B,p}$ .  
Die Indizes „r“ und „p“ sind also entbehrlich.

**Zusammenfassung:**



$$C_B = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L_T} = \frac{\omega_g}{\omega_0^2 \cdot R_N \cdot L'_T}$$



$$L_B = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_T} = \frac{\omega_g \cdot R_N}{\omega_0^2 \cdot C'_T}$$

**Grenzfrequenzen / Bandbreite**

Es war  $\omega_T = \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{\omega_B} \rightarrow$  Umstellung nach  $\omega_B$ :

$$\omega_B^2 - \omega_T \omega_B - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_B = \frac{\omega_r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_r}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

a)  $\underline{\omega_T = -\omega_g}$ :

$$\omega_B = -\frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Wir setzen:  $\omega_1 = -\frac{\omega_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$

$$\omega_1^* = -\frac{\omega_g}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

b)  $\underline{\omega_T = \omega_g}$ :

$$\omega_B = -\frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$



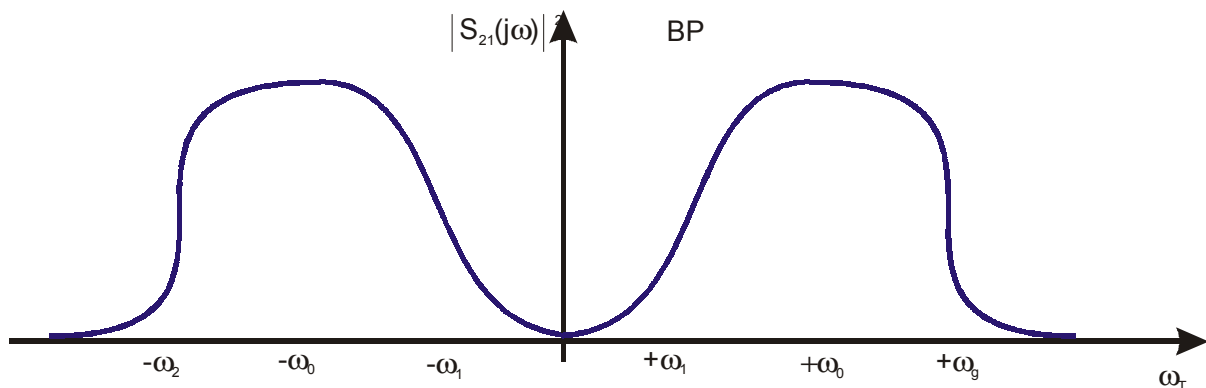
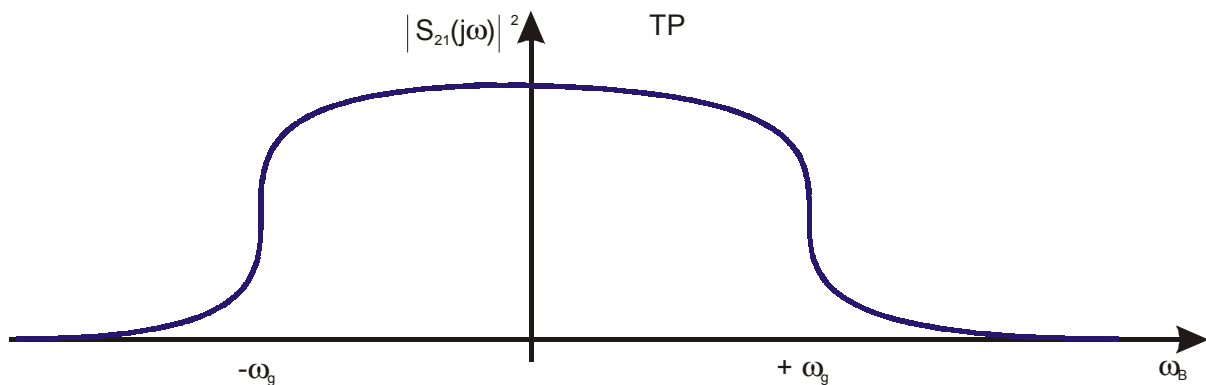
Wir setzen: 
$$\omega_2 = -\frac{\omega_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_2^* = -\frac{\omega_g}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$\omega_1^* = -\omega_2$  ;  $\omega_2^* = -\omega_1$   
 Damit

$$\omega_T = -\omega_g \rightarrow \begin{cases} \omega_B = -\omega_2 \\ \omega_B = \omega_1 \end{cases} \quad \omega_T = \omega_g \rightarrow \begin{cases} \omega_B = -\omega_1 \\ \omega_B = \omega_2 \end{cases}$$

$-\omega_2 < -\omega_0 < -\omega_1 < 0 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$



Aus den Ergebnissen folgt auch:

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_g}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_g$$

$$f_2 - f_1 = \Delta f = f_g$$

$f_1$  = untere Grenzfrequenz des BP  
 $f_2$  = obere Grenzfrequenz des BP  
 $\Delta f$  = Bandbreite des BP

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \left( \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_g}{2} \right) \cdot \left( \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_g}{2} \right) = \left( \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_0^2 - \left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

bzw

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

$f_0 \rightarrow$  geometrisches Mittel aus  $f_1$  und  $f_2$

02.02.2001

### Normierung

$$\omega_T = \omega_0 \left( \frac{\omega_B - \omega_0}{\omega_0 - \omega_B} \right) \rightarrow \frac{\omega_T}{\omega_g} = \frac{\omega_0}{\omega_g} \left( \frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_B/\omega_0} \right)$$

$\omega_T'$ 
 $\omega_B'$

$$\omega_T' = \frac{\omega_0}{\omega_g} \left( \omega_B' - \frac{1}{\omega_B'} \right)$$

mit  $\omega_T' = \frac{\omega_T}{\omega_g}$  und  $\omega_B' = \frac{\omega_B}{\omega_g}$

$$f_T' = \frac{f_T}{f_g} = \omega_T'$$

$$\frac{\omega_g}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \omega_2' - \omega_1' \rightarrow$$

$$\omega_T' = \frac{1}{\omega_2' - \omega_1'} \left( \omega_B' - \frac{1}{\omega_B'} \right)$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$$

$$\omega_1' \cdot \omega_2' = 1$$

$$\omega_0 = (\omega_1 \cdot \omega_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lg \omega_0 = \frac{\lg \omega_1 + \lg \omega_2}{2}$$

## Aufgabe 1: Tschbyscheff-Tiefpassfilter

Spezifikation

$w_{\max} = 0,7 \text{ dB}$  im DB

SB: für  $f = f_g \cdot 4$  soll die Sperrdämpfung  $a_s$  mind. 50 dB

$f_g = 5000 / 2 \cdot \pi \text{ Hz}$

$R_s = 500\Omega$   $R_L = 1k\Omega$

Speisung durch Stromquelle (IQ)

$\epsilon \rightarrow$  Blatt

$\rho \rightarrow$  Rubrik

$n \rightarrow$  Zeile

1.

$\epsilon$ :

$$w \leq 0,7 \text{ dB} \quad \rightarrow \quad w_{\text{gew}} = 0,5 \text{ dB} \rightarrow \epsilon = 0,3493 \quad \text{siehe Blatt 1/007}$$

2.

$\rho$ :

$$\rho = \frac{R_s}{R_L} \quad \text{weil } \rho < 1 \text{ sein muss}$$

$$\rho = \frac{500\Omega}{1000\Omega} = \frac{1}{2}$$

3.

$n$ :

$$f_s' = \frac{f_s}{f_g} \quad f_s' = \frac{4 \cdot 5000 \cdot 2 \cdot \pi}{5000 \cdot 2 \cdot \pi} = 4$$

$$T_n(f_s') \geq \frac{\sqrt{10^{\frac{a_s}{10}}}}{\epsilon_{\text{gew}}} \quad T_n(4) = \frac{\sqrt{10^{\frac{50}{10}}}}{0,3493}$$

$$n_{\text{erf}} \geq \frac{\lg\left[T_n(f_s') + \sqrt{T_n(f_s')^2 - 1}\right]}{\lg\left[f_s' + \sqrt{f_s'^2 - 1}\right]} \quad n_{\text{erf}} = \frac{\lg\left[T_n(4) + \sqrt{T_n(4)^2 - 1}\right]}{\lg\left[4 + \sqrt{4^2 - 1}\right]} = 3,635$$

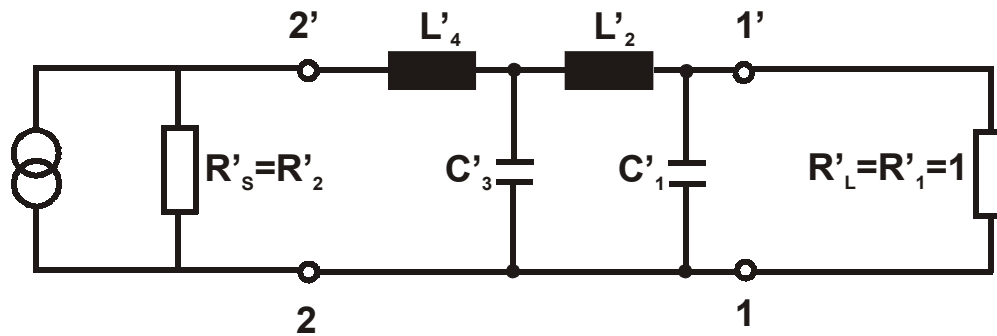
$$n_{\text{gew}} = 4$$

Normiertes TP:

IQ  $\rightarrow$  Schaltung B1 – B4    Blatt1/011

$R_s < R_L \rightarrow$  Schaltung B1 oder B4

gewählt B4



$$C_1' = 1,8158$$

$$L_2' = 1,1328$$

$$C_3' = 2,4881$$

$$L_4' = 0,7732$$

aus Blatt 1/007 bei  $\rho=1/2$  und  $n=4$

Entnormierung

$$\omega_N = \omega_g = 2\pi f_g = 5000 \text{ s}^{-1}$$

$$R_N = R_L = R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = \frac{C'}{\omega_N R_N} \quad L = \frac{L' R_N}{\omega_N}$$

$$C_1 = 0,363 \text{ }\mu\text{F}$$

$$L_2 = 227 \text{ mH}$$

$$C_3 = 0,498 \text{ }\mu\text{F}$$

$$L_4 = 155 \text{ mH}$$

## Aufgabe 2: Tschbyscheff-Hochpassfilter

Spezifikation

$$w_{\max} = 0,7 \text{ dB im DB}$$

SB: für  $f_H = f_{gH} / 4$  soll die Sperrdämpfung  $a_s$  mind. 50 dB

$$f_{gH} = 5000 / 2 \cdot \pi \text{ Hz}$$

$$R_s = 500 \Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

Speisung durch Stromquelle (IQ)

Lösung:

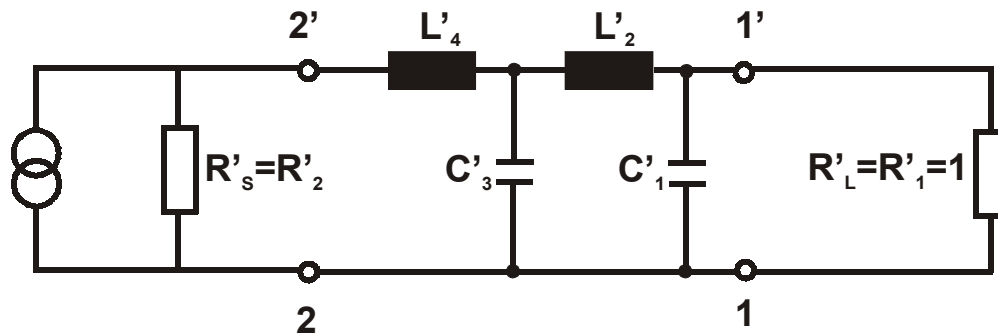
Umwandelung der Anforderungen an den HP in entsprechende Anforderungen an den TP!

$$a) \omega_{gT} = \omega_{gH} = \omega_g \quad \rightarrow \quad \omega_g = 2\pi f_g = 5000 \text{ s}^{-1}$$

$$b) f'_{SH} = \frac{f_{SH}}{f_{gH}} = \omega'_{SH} = \frac{f_{SH}}{f_g} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \omega'_{ST} = \frac{1}{\omega'_{SH}} = 4$$

Jetzt Aufgabenstellung wie in Aufgabe 1  $\rightarrow$  Ergebnisse übernehmen  $\rightarrow$  Normierter TP

Schaltung B4  $R_N = R_1 = R_L = 1 \text{ k}\Omega$



$$C'_1 = 1,8158$$

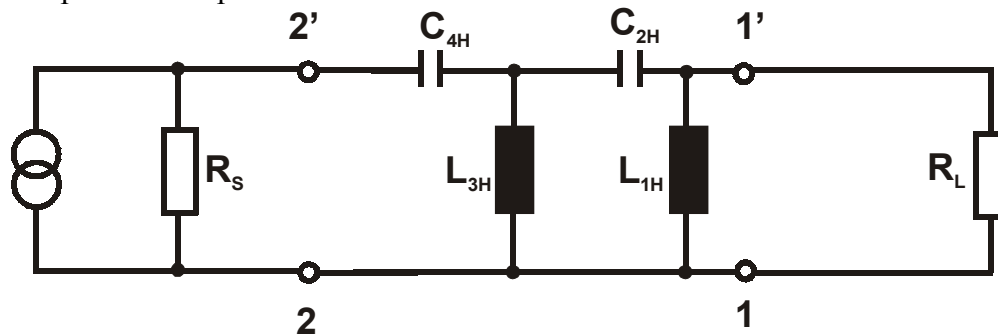
$$L'_2 = 1,1328$$

$$C'_3 = 2,4881$$

$$L'_4 = 0,7732$$

aus Blatt 1/007 bei  $\rho=1/2$  und  $n=4$

Tiefpass – Hochpass – Transformation



$$L_H = \frac{R_N}{\omega_g C'_T} \quad C_H = \frac{1}{\omega_g R_N L'_T}$$

$$L_{1H} = 110 \text{ mH}$$

$$L_{3H} = 80 \text{ mH}$$

$$C_{2H} = 177 \text{ nF}$$

$$C_{4H} = 259 \text{ nF}$$

### Aufgabe 3: Tschbyscheff-Bandpassfilter

Spezifikation

$$f_1 = 97,5 \text{ MHz} \quad f_2 = 102,5 \text{ MHz}$$

DB:  $P_{wl \text{ refl.}} \rightarrow \max 4\%$  von  $P_{wl \text{ hin}}$

SB: für  $f_{BS} = 110 \text{ MHz}$  Sperrdämpfung  $a_s$  mind. 30 dB

$$R_s = R_L = 50 \Omega$$

Speisung durch Spannungsquelle

Möglichst wenig Spulen im Längszweig

Lösung:

1. Umwandlung der Anforderungen an den BP in entsprechende Anforderungen an den normierten TP!

a)  $f_g = \Delta f = f_2 - f_1 = 5 \text{ MHz}$

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 99,97 \text{ MHz}$$

b)  $f'_{TS} = \frac{f_0}{f_g} \left( \frac{f_{BS}}{f_0} - \frac{f_0}{f_{BS}} \right)$  für  $f_{BS} = 100 \text{ MHz} \rightarrow f'_{TS} = 3,8295$

2. Normierter Tiefpass

a)

$\epsilon$ : für ungerade  $n$  gilt  $\rho=1$  weil  $\rho \rightarrow \frac{R_S}{R_S} = \frac{50\Omega}{50\Omega} = 1$

$$\epsilon_{erf} \leq \frac{|r_1|_{\max \text{ zul}}}{\sqrt{1 - |r_1|_{\max \text{ zul}}^2}}$$

$$|r_1|_{\max \text{ zul}}^2 = \frac{P_{w\text{refl}}}{P_{w\text{hin}}} = 0,04 \rightarrow |r_1|_{\max \text{ zul}} = 0,2$$

$$\epsilon_{erf} \leq \frac{0,2}{\sqrt{1 - 0,04}} = 0,2041 \text{ siehe Blatt 1/005}$$

$$\epsilon_{\text{gem}} = 0,1526$$

b)

$\rho=1$  (siehe oben)

c)

n:

$$T_n(f'_{TS})_{erf} \geq \frac{\sqrt{10^{\frac{a_s}{10}} - 1}}{\epsilon_{\text{gew}}}$$

$$a_s \geq 30 \text{ dB}$$

$$T_n(3,8295)_{erf} \geq \frac{\sqrt{10^{\frac{30}{10}} - 1}}{0,1526} = 207,17$$

$$n_{erf} = \frac{\lg[T_n(f'_{TS}) + \sqrt{T_n^2(f'_{TS}) - 1}]}{\lg[f'_{TS} + \sqrt{f'^2_{TS} - 1}]} = 2,986$$

$$n_{\text{gew}} = 3$$

d)

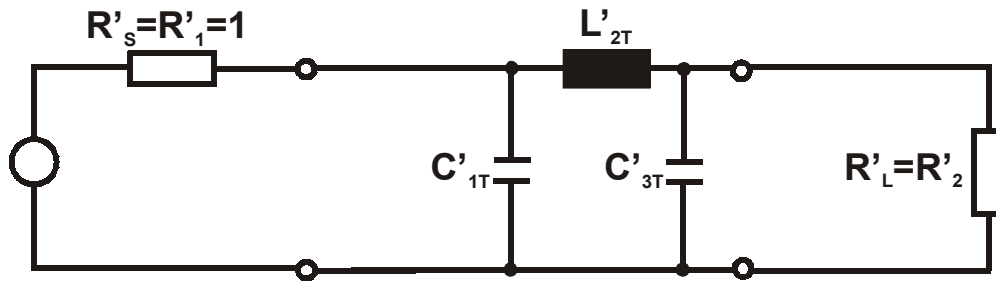
Schaltung siehe Blatt 1/011

UQ  $\rightarrow$  Schaltung A1-A4 möglich

wenig Induktivitäten im Längszweig  $\rightarrow$  nur A3 oder A4

weil  $\rho=1$   $n=3$  nach Blatt 1/005  $\rightarrow$  A3 und A4 sind identisch  $\rightarrow C'_1=C'_3$

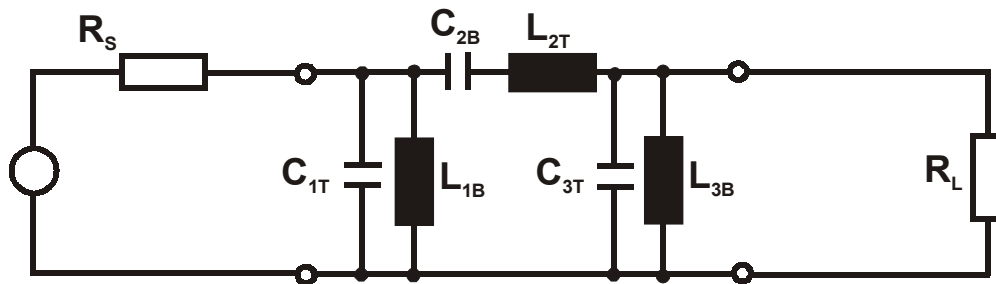
gewählt A3



$$C'_{1T} = C'_{2T} = 1,0316$$

$$L'_{2T} = 1,1474$$

3. TP → BP



$$\omega_n = \omega_g = 2\pi \cdot 5\text{MHz} \quad R_N = 50\Omega$$

Entnormierung der TP-Bauteile

$$C_T = \frac{C'_T}{\omega_N R_N} \quad L_T = \frac{L'_T R_N}{\omega_N}$$

Entnormierung der BP-Bauteile

$$C_B = \frac{\omega_g}{\omega_0^2 R_N L'_T} \quad L_B = \frac{\omega_g R_N}{\omega_0^2 C'_T}$$

$$C_{1T} = C_{3T} = 0,657\text{nF} = C_{1B} = C_{3B}$$

$$L_{2T} = 1,826 \mu\text{H} = L_{2B}$$

$$L_{1B} = L_{3B} = 3,858 \text{ nH}$$

$$C_{2B} = 1,388 \text{ pF}$$

Theoretische Werte

Praktisch kaum möglich weil

1. Bauteil Toleranzen
2. Andere Effekte überlagern (z.B. Wicklungskapazitäten der Spulen, usw)