

Vorlesung

**Akustik und Schwingungsmesstechnik**

Dozent

**Prof. Dr. G. Babel**

Mitschrift

**Andreas Hagedorn**

**WS 2000/2001**

**SS 2001**

Achtung !

Keine Gewähr auf Richtigkeit und Vollständigkeit

<b>Akustik und Schwingungsmesstechnik .....</b>	<b>1</b>
1. Einführung.....	3
1.1. Physikalische Größen und Einheiten der Akustik .....	3
1.2. Hör- und Sprechorgan.....	6
1.2.1. Sprechorgan .....	6
1.2.2. Hörorgan.....	8
1.2.3. Hörfläche.....	11
1.3. Töne und Klänge.....	14
1.4. Rauschen .....	16
1.5. Ultraschall, Hyperschall.....	20
1.5.1 Ultraschall.....	20
1.5.2 Hyperschall .....	21
2. Signaltheorie .....	24
2.1. Elementarsignale.....	25
<i>ES FEHLEN NOCH SIGNALE z.B.: F{SRUNG}; GAUß; F{GAUß} .....</i>	<i>27</i>
2.2. Systembetrachtung, Fouriertransformation .....	28
2.3. Kettenschaltung, Faltung im Zeitbereich.....	28
<i>FEHLT NOCH KOMPLETT 21.11.2000.....</i>	<i>28</i>
2.4. Multiplikation von Signalen, Faltung im Frequenzbereich.....	29
<i>FEHLT NOCH KOMPLETT 21.11.2000 u. 12.12.2000 .....</i>	<i>29</i>
2.5. Laplacetransformation, Z-Transformation .....	29
<i>FEHLT NOCH KOMPLETT 9.1.2001 u. 23.1.2000 .....</i>	<i>30</i>
3. Schallwellen und Schallfelder.....	31
3.0.1. Allgemeines .....	31
3.0.2. Grundgleichungen akustischer Wellenausbreitung.....	32
3.1. Ebene Welle.....	34
3.1.1. Die Brechung akustischer Wellen .....	37
3.1.1 Akustische Linsen .....	38
3.2. Kugelwelle, Punktquelle .....	39
3.3. Zylinderwelle.....	45
<i>DATEI VON PROF BABIEL FEHLT .....</i>	<i>45</i>
3.4. Linienuelle.....	45
<i>FEHLT .....</i>	<i>45</i>
3.5. Richtgrößen .....	45
<i>AB HIER FEHLT NOCH ALLES.....</i>	<i>48</i>
3.6. Dipolstrahler .....	48
3.7. Schwingende Platte.....	48
3.7.1. Kolbenmembran .....	48
3.7.2 Konusmembran.....	48

10.10.2000

# Akusik- und Schwingungsmesstechnik

## 1. Einführung

Die Wissenschaft von Schall wird als Akustik bezeichnet. Diese definiert den Schall als mechanische Schwingungen der Materie (z.B. Membrane, Saiten, Zunge), die über ein Medium (Luft) vom Menschlichen Ohr wahrgenommen wird.

### 1.1. Physikalische Größen und Einheiten der Akustik

**Schalldruck  $p$**        $p = \frac{\vec{F}}{\vec{s}}$        $[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$  (Pascal)

$\vec{F}$  -Kraft  
 $\vec{s}$  -Fläche

Der Schalldruck ist der zeitlich ändernde Anteil des Luftdrucks (Wechselschalldruck). Der Gleichanteil, das heißt der atmosphärische Druck (statischer Druck), beträgt im Mittel 760 Torr =  $1,013 \cdot 10^5$  Pa. Langsame Luftdruckänderungen mit verschiedenen Frequenzen werden anderen Schallbereichen zugeordnet (siehe Tabelle).

$$p = p_{\text{=}} + p_{\text{~}}$$

$p_{\text{=}}$  -statischer Druck

$p_{\text{~}}$  -Wechselschalldruck

Wenn keine besondere Kennzeichnung gilt Vereinbarung:  $p = p_{\text{~}}$

Der Schalldruck ist ein Skalar, das heißt eine ungerichtete Größe. Der kleinst Schalldruck den das Menschliche Gehör wahrnehmen kann beträgt etwa  $10 \mu Pa$ . Der Schall der ohne Schmerzen wahrgenommen werden kann liegt bei 100 Pa. Die Größe des Wechselschalldrucks ist also für das Hören verantwortlich (siehe Tabelle). In der Nähe der Erdoberfläche sinkt der Luftdruck je 10cm um etwa 1Pa! Beim periodischen Heben und Senken des Kopfes entstehen also respektable (Infra-)Schalldrucke, die nur deshalb nicht wahrgenommen werden, weil unser Gehör für langsame Druckänderungen sehr unempfindlich ist.

Frequenzbereich	Schallbereich
< 16 Hz	Infraschall
6 Hz – 20 kHz	Hörschall
> 20 kHz	Ultraschall
> 1GHz	Hyperschall

Druckbereich	Beispiel
$P_0=20\mu Pa$	Hörschwelle
0,02 Pa	Sprache
100 Pa	Schmerzgrenze
$10^5$ Pa	statischer (Luft)- Druck

**Schallgeschwindigkeit c**  $[c] = \frac{m}{s}$

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit der sich der Schall in einem Medium fortsetzt. In Luft wird sie meistens als Konstante angenommen ( $c_L = 340 \text{ m/s}$ ). Jedoch sollt man bedenken, das diese von mehreren Faktoren abhängt. Hier sei speziell die Temperatur  $\vartheta$  genannt. Bei Temperaturerhöhung erniedrigt sich die Luftdichte und damit steigt die Schallgeschwindigkeit  $c_L$ . Auf die Beziehung wird hier nicht näher eingegangen. (Weil anscheint nicht Klausurrelevant) Außer in Luft und anderen Gasen kann sich Schall auch in Feststoffen bzw. Flüssigkeiten ausbreiten. Man spricht dann von Körperschall bzw. Wasserschall. So ergeben sich Materialabhängige Schallgeschwindigkeiten (siehe Tabelle).

Schallgeschwindigkeit  $c_L = 340 \text{ m/s}$

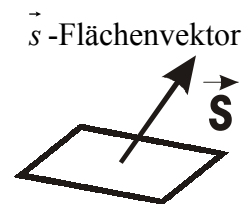
Material	Schallgeschwindigkeit
Kohlensäure	260 m/s
H <sub>2</sub>	1309 m/s
H <sub>2</sub> O	1485 m/s
Pb	1300 m/s
Fe	5100 m/s
Glas	4000-5300 m/s

**Schallschnelle v**  $[\vec{v}] = \frac{m}{s}$

Während die Schallgeschwindigkeit angibt, wie schnell sich eine Schallwelle in einem Medium ausbreitet, beschreibt die Schallschnelle die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung, z.B. der Luftmoleküle.

Teilchengeschwindigkeit (elektrische Analogie = Strom)<sup>1</sup>

**Schalleistung P**  $P = p \cdot \vec{v} \cdot \vec{s}$   $[P] = \frac{Nm}{s} = W$  (Nm=Ws)



Betrag = Flächeninhalt  
Richtung = Senkrecht zur Ebene

Die Schalleistung ist ähnlich der mechanischen bzw. elektrischen Leistung und wird meist als Mittelwert angegeben und nicht als Momentanwert.

**Schallintensität I**  $\vec{I} = p \cdot \vec{v} = \frac{P}{s}$

<sup>1</sup> Analogie (griech.) Vergleichbarkeit



Die Schallintensität ist eine Leistungsgröße pro Flächeneinheit.

Bezugsschallintensität  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

$$\begin{aligned} \text{Schallpegel } L & \quad L = 20 \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB} & \quad \text{mit } P_0 = 20 \text{ } \mu\text{Pa} \\ & \quad L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB} & \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2} \end{aligned}$$

Die Schalldrücke, die das menschliche Gehör verarbeiten kann, liegen zwischen  $10^{-5}$  und  $10^2$  Pa . Um in diesem Bereich nicht immer mit Exponenten rechnen zu müssen, werden Größen in der Akustik (wie auch in der Nachrichtentechnik) häufig als logarithmische Größen in Pegeln dargestellt. Der Logarithmus ist nur für dimensionslose Zahlen definiert, daher muss jede zu logarithmierende Größe auf einen Bezugswert normiert werden. (Die Bezugswerte für Schalldruck und Schallintensität sind oben angegeben.) Die Darstellung ist analog zu elektrischen Pegel.

$$\text{Schallfeldimpedanz } Z_s \quad Z_s = \frac{p}{v} \quad [Z_s] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$$

Es gibt da noch eine weitere veraltete Einheit. 1 Rayl =  $10 \text{ Ns/m}^3$  . Die Schallfeldimpedanz ist analog zur elektrischen Impedanz.

Beispiel für ebene Welle in Luft  $Z_0 = 414 \text{ Ns/m}^3$

## 1.2. Hör- und Sprechorgan

### 1.2.1. Sprechorgan

Da wir alle ein Sprechorgan und zwei Hörorgane besitzen, sind sie uns in ihrer äußeren Form gut bekannt. Die nicht direkt sichtbaren Teile spielen aber eine noch wichtigere Rolle als die äußeren, so dass vor allem auf erstgenannte eingegangen werden soll.

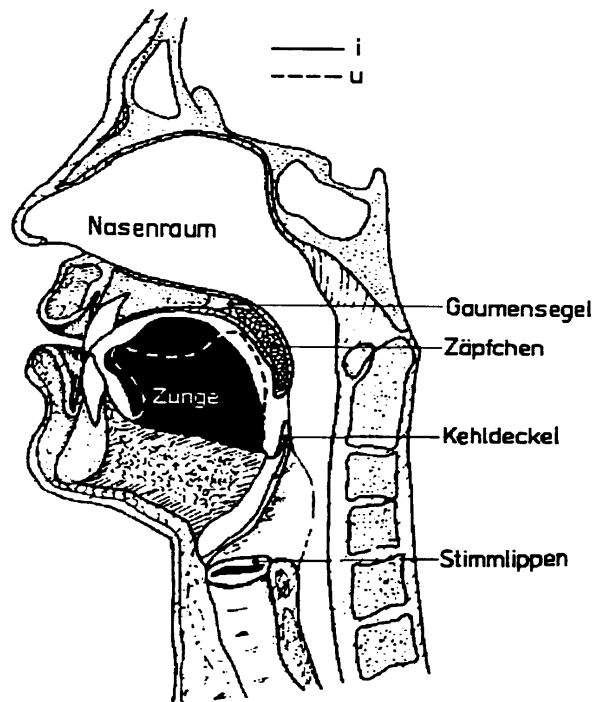


Abbildung 1: Sprechorgan

Die Energiequelle des Sprechorgans ist die in der Lunge gespeicherte Luft, die unter Druck über die Luftröhre, den Rachenraum und die Mundhöhle mit Öffnung bzw. den Nasenraum mit Öffnung nach außen abgegeben werden. Der in der Luftröhre sitzende Kehlkopf enthält zwei Stimmlippen, welche beim normalen Atmen weit geöffnet sind. Soll ein stimmhafter Konsonant gesprochen werden, so schließen sich die bänderartigen Stimmlippen und es entsteht ein Überdruck in der Luftröhre, der diese Lippen aufdrückt. Der einsetzende Luftstrom baut den Druck ab. Die sich wieder schließenden Stimmlippen unterbrechen den Luftstrom, so dass sich erneut Druck aufbaut, der seinerseits wieder diese Lippen aufdrückt. Auf diese Weise entsteht ein sägezahnähnlicher Druckverlauf im Kehlkopf. Die Frequenz, mit der dieser sich wiederholende Vorgang abläuft, kann durch Muskelanspannung der Stimmlippen verändert werden. Diese sogenannte Grundfrequenz der Sprache wird auch als Stimmlage bezeichnet und kann z.B. beim Singen erheblich variiert werden; beim Kind und bei der Frau zwischen etwa 120 und 500 Hz, beim Mann zwischen etwa 60 und 250 Hz.

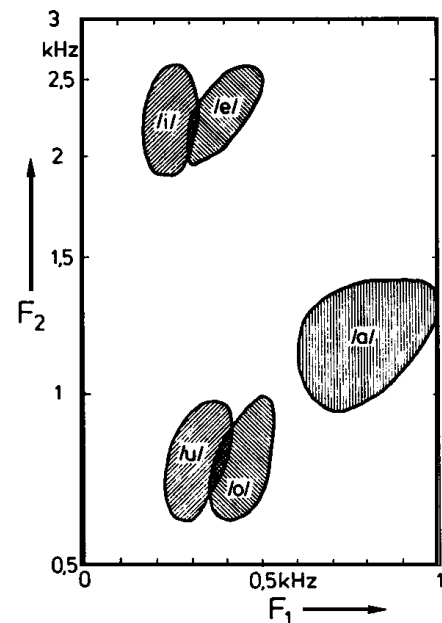
Neben der Grundfrequenz enthält der Schalldruck-Zeitverlauf am Kehlkopf sehr viele Harmonische. Die angekoppelten Räume (Rachenraum, Mundraum, Nasenraum) und Öffnungen (Mund und Nase) wirken als akustische Filter, welche bestimmte Frequenzbereiche, die sogenannten Formanten, gut übertragen, dazwischen- oder danebenliegende Bereiche jedoch weitgehend unterdrücken. Mit Hilfe der die Form des Mundhohlraumes stark verändernden Zunge, der An- oder Abkopplung des Nasenraumes

durch das Gaumensegel sowie durch verschieden weites Öffnen des Mundes können die Formanten bzw. die Übertragungsfunktion des akustischen Filters stark verändert werden. Auf diese Weise werden die verschiedenen Klangfarben der Vokale a-e-i-o-u erzeugt, was leicht durch bewusstes Erfühlen der Zungenstellung bei der Bildung der Vokale erkannt werden kann. Die Vokale bestehen demnach aus einem Linienspektrum mit der Grundfrequenz als Linienabstand. Die Umhüllende des Spektrums spiegelt die Übertragungsfunktion des akustischen Filters wider und ist charakteristisch für den jeweiligen Vokal. Die meisten Vokale besitzen zwei Hauptformanten  $F_1$  und  $F_2$ , deren Frequenzlagen aus dem sogenannten Formantendreieck entnommen werden kann.

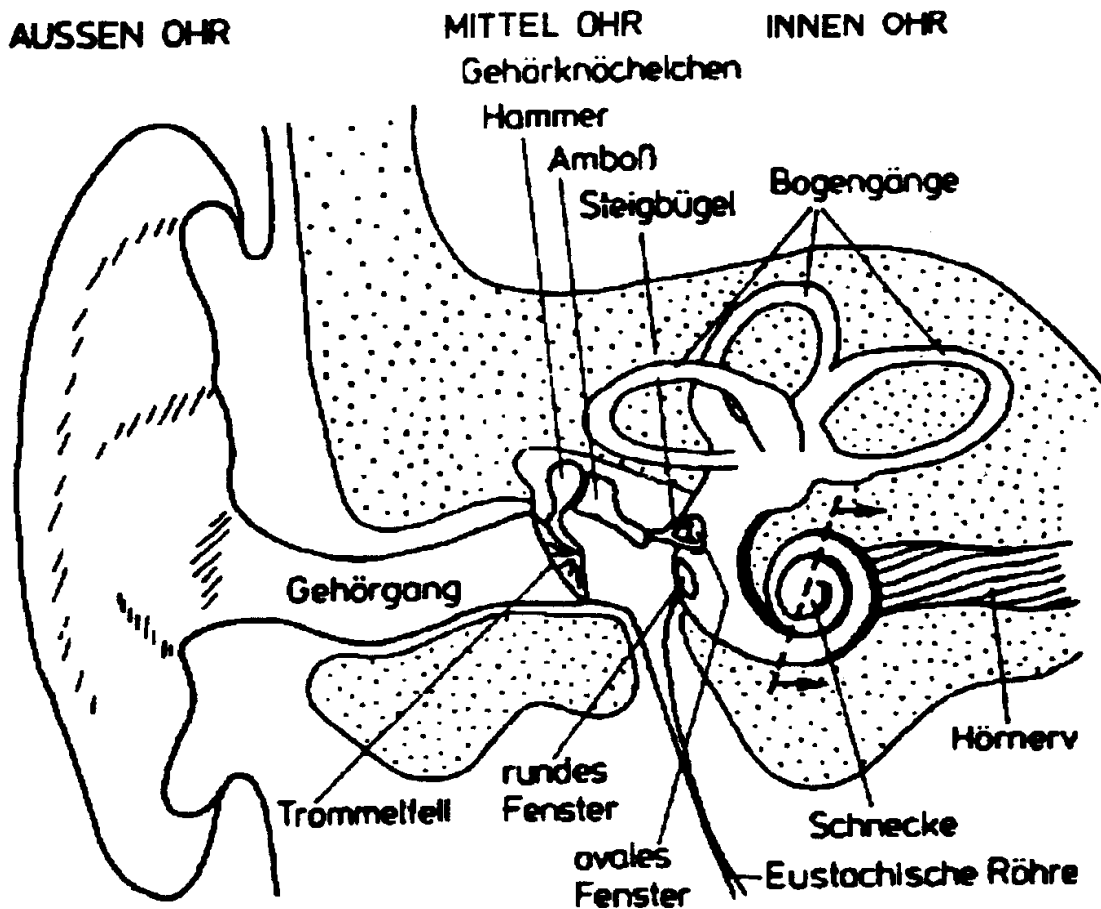
Die verschiedenen stimmhaften oder stimmlosen Konsonanten werden entsprechend der Art ihrer Erzeugung als Nasale (m, n, ng), Frikative (f, s, ch, sch), Plosive (b, d, g, p, t, k) und Liquidae (l, r) bezeichnet. Obwohl sie zur Lautstärke der Sprache nur sehr wenig beitragen (vor allem das "a" ist der für die Lautstärke maßgebliche Vokal), tragen sie wesentliche Informationsanteile. Wenn sie nicht übertragen werden oder in einem Störgeräusch verschwinden, wird Sprache unverständlich. Neben den Konsonanten und den Vokalen sind auch die Übergänge zwischen beiden für das Sprachverständnis wichtig.

Diese Übergänge sind zusammen mit den stationären Anteilen der Vokale die kleinsten Einheiten, in die Sprache zerlegt und - in anderem Zusammenhang wieder zusammengesetzt werden kann. Im Deutschen gibt es etwa 200 solcher Grundeinheiten.

Die zeitliche Struktur der Sprache wird nur unwesentlich von den Satz- bzw. Wortgrenzen beeinflusst. Viel ausgeprägter sind die Pausen vor den häufig auftretenden Plosiven. Sie dauern etwa 60 bis 100 ms. Obwohl sie in der Zeitstruktur des Schalldruckpegels so deutlich ausgeprägt sind, werden sie kaum wahrgenommen, wenn nicht besonders darauf geachtet wird.



## 1.2.2. Hörorgan



**Abbildung 2:** Schematische Darstellung von Außen-, Mittel- und Innenohr

Das Außen-, das Mittel- und das Innenohr bilden das Hörorgan. Was gemeinhin als Ohr bezeichnet wird, ist das Außenohr. Es fängt den Schall auf und leitet ihn in den Gehörgang zum Trommelfell weiter. Der Gehörgang ist etwa 20 mm lang. Dies entspricht bei etwa 4 kHz - 1/4 der Wellenlänge der Schallschwingung in Luft. Die Übertragung vom freien Schallfeld zum Trommelfell ist in der Nähe dieser Frequenz besonders gut. Meist ist im Frequenzbereich zwischen 3 und 5 kHz die Hörempfindlichkeit der Menschen mit normalem Gehör am größten. In diesem Frequenzbereich ist allerdings auch die Anfälligkeit des Gehörs gegen Schädigung sehr groß.

Das Mittelohr ist in einem normalerweise abgeschlossenen Raum untergebracht, der sich nur beim Schlucken oder Gähnen über die Eustachische Röhre zum Rachenraum hin öffnet. Drei Mittelohrknöchelchen (Hammer, Amboss und Steigbügel) übertragen die vom Trommelfell aufgenommenen Schwingungen zum ovalen Fenster, dem Eingang zum Innenohr. Die drei Knöchelchen sind beweglich gelagert und wirken wie kleine Hebel zusammen. Außer der Hebelübersetzung wirkt in gleicher Richtung auch die Flächenübersetzung vom relativ großen Trommelfell zum relativ kleinen ovalen Fenster. Auf diese Weise wird die am Trommelfell vorhandene kleine Kraft in eine große Kraft am ovalen Fenster transformiert und der Eingangswiderstand zum Innenohr an den entsprechenden Widerstand am Trommelfell



angepasst. Obwohl die Gehörknöchelchen sehr klein sind, wird ihre Masse bei Frequenzen oberhalb von etwa 2 kHz wirksam, die Übertragung wird schlechter. Dieser Effekt wird mit wachsender Frequenz zunächst von der  $\lambda/4$ -Resonanz des Gehörgangs überkompensiert. Oberhalb von etwa 6 kHz wird die Übertragung jedoch deutlich schlechter. Sie erreicht bei 20 kHz Dämpfungswerte von nahezu 60 dB. Von mittleren nach tiefen Frequenzen ändert sich das Übertragungsmaß des Mittelohres für kleine Schalldrucke nicht. Selbst eine Gleichdruckänderung, wie sie am Barometer registriert werden kann oder wie sie beim Aufzugfahren auftritt, führt zu einer entsprechenden - allerdings außerordentlich starken stationären Auslenkung, die wegen ihrer Größe eine "Verschiebung" des Arbeitspunktes und damit eine Verschlechterung des Übertragungsverhaltens für Schallschwingungen hervorruft. Um die auftretenden Größenordnungen zu veranschaulichen, sei darauf hingewiesen, dass eine sinusförmige Höhenänderung um  $\pm 20$ m einen Schalldruckpegel von 140 dB! erzeugt. Dass der Mensch bei einer Passfahrt mit einer Höhendifferenz von 500 m das deutliche Bedürfnis hat zu schlucken, ist weise eingerichtet und erfüllt einen wichtigen Zweck. Beim Schlucken öffnet sich die Eustachische Röhre, es findet ein Druckausgleich statt, und die Gehörknöchelchen schwingen wieder um ihren normalen Arbeitspunkt; man hört wieder normal!

## SCHNECKE (im Schnitt)

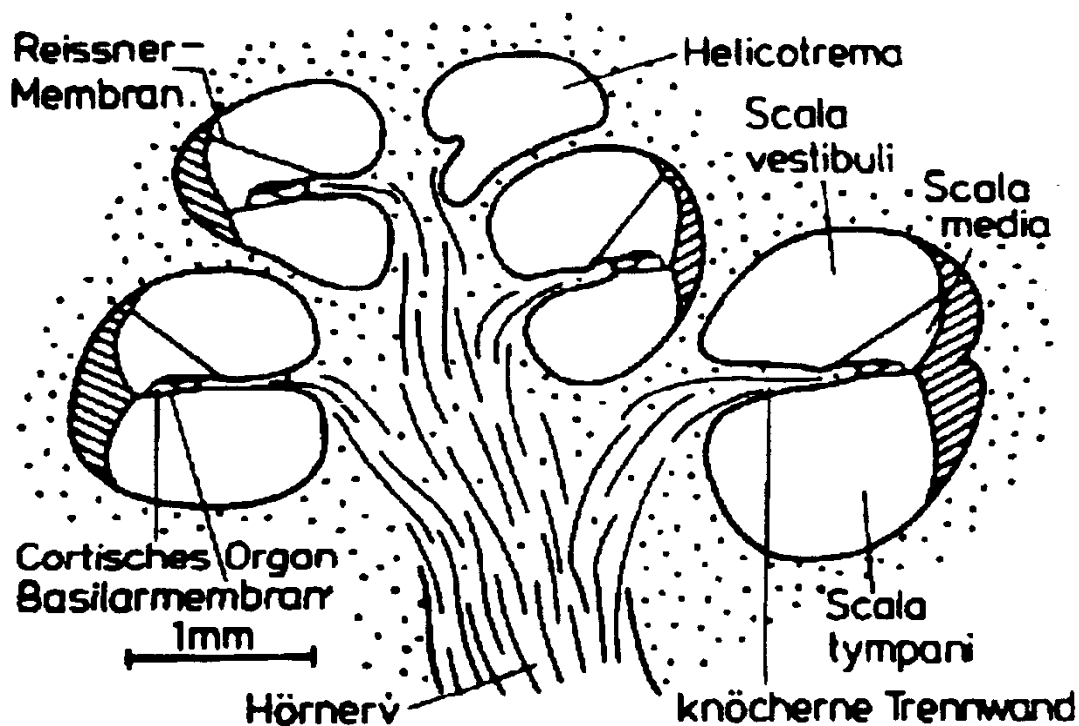


Abbildung 3: Schnitt durch das Innenohr

Dass die tieffrequenten starken Schalle nicht zu ebenso starken Empfindungen führen, hängt mit der Struktur des Innenohres zusammen. Es hat die Form einer Schnecke, wobei der Schneckengang der Länge nach in zwei Kanäle aufgeteilt ist. Zwischen beiden Kanälen liegt die bewegliche Basilar-membran, auf der sich das Cortische Organ mit den Sinneszellen befindet. Die Schnecke hat  $2 \frac{1}{2}$  Windungen, ist in einem sehr harten Knochen, im sogenannten Felsenbein, eingebettet und mit Lympflüssigkeit gefüllt. Zum leichteren Verständnis wird die Schnecke (Cochlea) häufig in abgewickelter Form schematisch

dargestellt. Das ovale Fenster führt zum einen Kanal (scala vestibuli); der andere Kanal (scala tympani) besitzt im runden Fenster eine mit einer Membran abgeschlossene Ausgleichsöffnung. Bei der Schneckenspitze, d. h. am Ende der abgewickelten Schnecke, sind die beiden Kanäle über eine Öffnung, das Helicotrema, verbunden. Über diese Öffnung findet bei sehr tiefen Frequenzen bzw. bei Gleichdruckänderung eine Verschiebung der Flüssigkeitssäulen in den beiden Kanälen statt, so dass die Sinneszellen nicht gereizt werden. Wird die Frequenz in den hörbaren Bereich, z.B. 100 Hz, erhöht, so schwingt die Basilarmembran in der Nähe des Helicotrema hin und her; die dort im Cortischen Organ befindlichen Sinneszellen werden gereizt. Für sehr hohe Frequenzen, z.B. 10 kHz, kann die große Flüssigkeitssäule in den Kanälen nicht vollständig hin und her geschoben werden. Vielmehr wird der Ausgleich vom ovalen Fenster zum runden Fenster über einen kurzen Weg vollzogen und die Basilarmembran nur in der Nähe der beiden Fenster in Schwingung gesetzt. Alle anderen Bereiche der Basilarmembran bleiben in Ruhe. Auf diese Weise entsteht ein für den Hörvorgang äußerst wichtiger Effekt, nämlich eine Frequenz-Orts-Zuordnung, welche mit einer ausgeprägten Frequenzselektivität verknüpft ist. Die Basilarmembran schwingt in Wanderwellen; es gibt also keine Schwingungsknoten und -bäuche. Vielmehr wandert die Welle auf der Basilarmembran in Richtung Helicotrema. Ein 1,5-kHz-Ton z.B. erzeugt bei den Fenstern sehr kleine Auslenkungen, die bis zur Mitte der abgewickelten Schnecke hin immer stärker anwachsen, dort ein ausgeprägtes Maximum erreichen und danach rasch zu äußerst kleinen Werten abfallen.

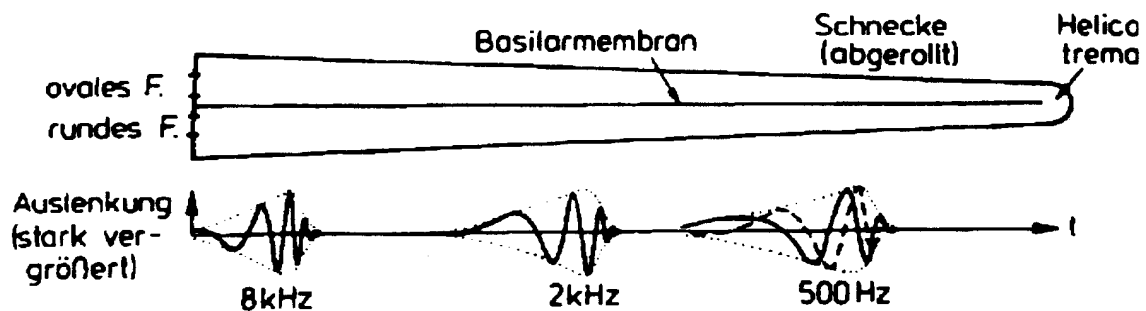
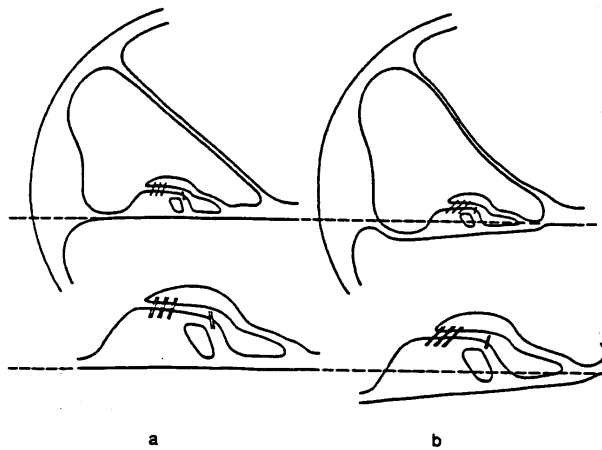
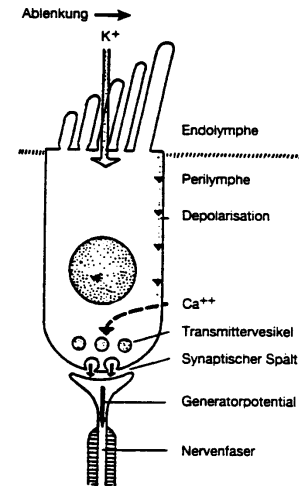


Abbildung 4: Schnecke abgewickelt

Die vielen Sinneszellen im Innenohr geben die aus den Schwingungsamplituden der Basilarmembran entnommene Information mit Hilfe von Aktionspotentialen über den Hörnerv an die höheren Zentren der Verarbeitung weiter. Obwohl schon nach der ersten Stufe eine Vermaschung mit den Nerven des anderen Ohres stattfindet (für die Lokalisation des Schalles wichtig!), bleibt die systematische Frequenz-Orts-Zuordnung auch in höheren Verarbeitungszentren erhalten. Wie die Verarbeitung von Schallen zu Wahrnehmungen oder Empfindungen im Gehirn abläuft, ist noch weitgehend unbekannt.



**Abbildung 5: Schema des Innenohres**



**Abbildung 6: Endolymphe**

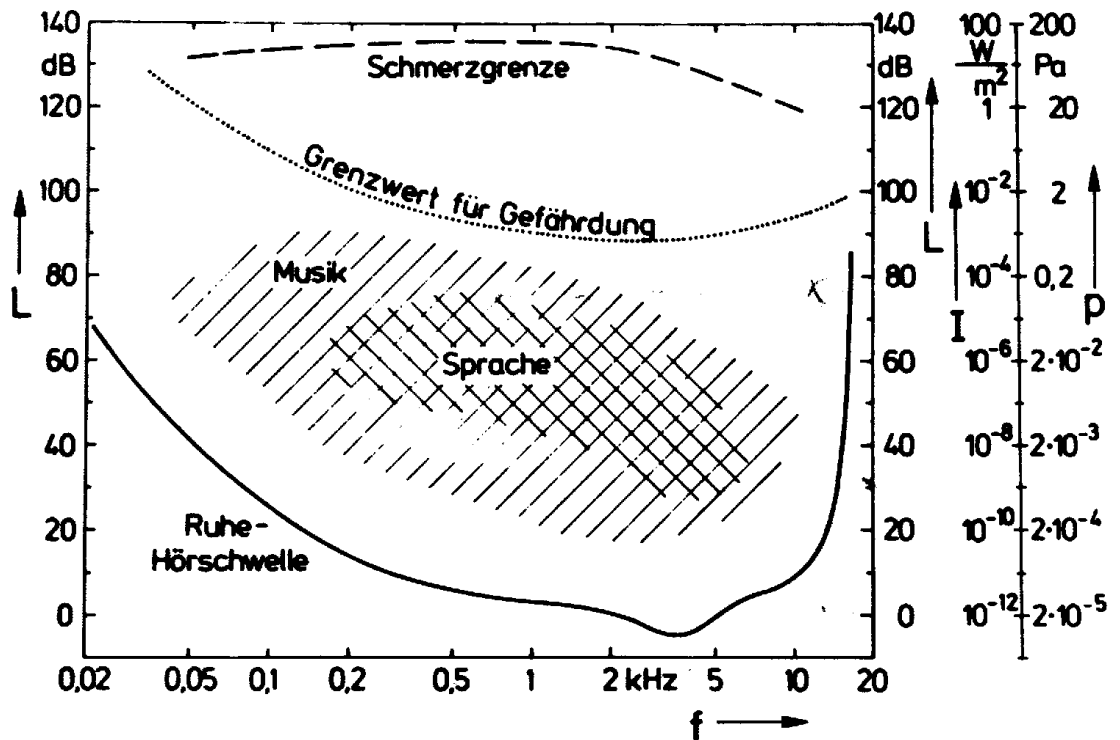
Diese Abbildungen zeigen:

a) oben) Schema des Innenohres mit Basilarmembran und den darauf sitzenden Haarzellen. Die Hörsinneszellen weisen am apikalen Ende haarähnliche Fortsätze, sog. Stereozilien auf (a), die bei Auslenkung der Basilarmembran durch den akustischen Reiz reizsynchron abgebogen werden (b).

b) rechts) Die über eröffnete Ionenkanäle einströmenden Kaliumionen führen zu einer Depolarisation der Zeile und zur Freisetzung von Transmitterquanten in den synaptischen Spalt. In der afferenten Hörnervenfaser führt dies zum Aufbau eines Aktionspotentials. (aus Boenninghaus, 1993) (Wem es hilft!?)

### 1.2.3. Hörfläche

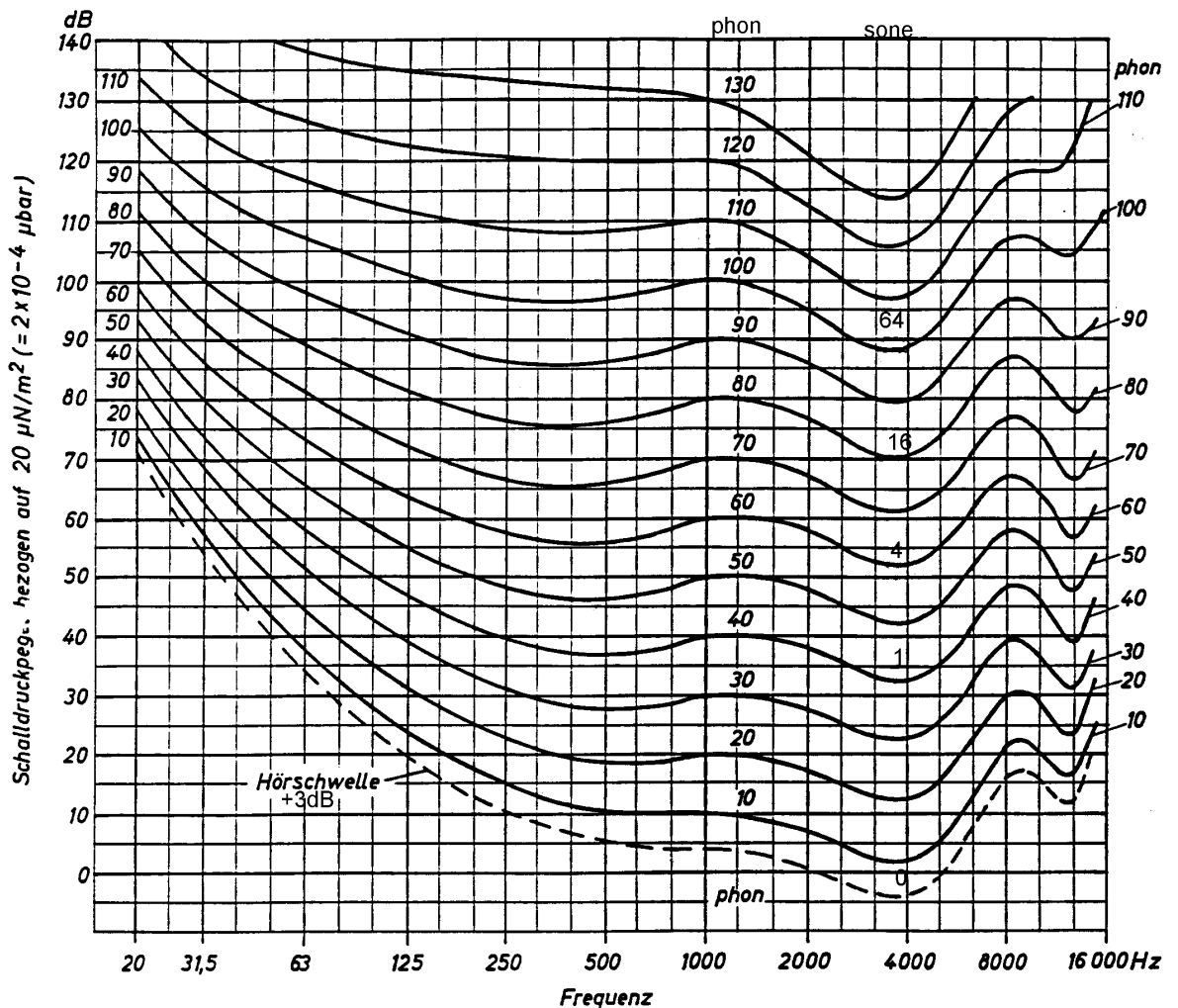
In der Hörfläche können alle hörbaren Sinustöne verschiedener Frequenz und verschiedenen Pegels bezeichnet werden. Als Abszissenskala wird die Frequenz in logarithmischem Maßstab, als Ordinaten-skala werden die Schallintensität oder der Schalldruck in logarithmischem oder aber der Schallpegel in linearem Maßstab benutzt. Die Hörfläche wird nach kleinen Pegeln hin durch die stark frequenzabhängige Ruheshörschwelle (Grenze der Wahrnehmbarkeit), nach großen Pegeln durch die Schmerzgrenze begrenzt.



**Abbildung 7: Hörfläche**

Unter der Ruhehörschwelle sind Töne nicht mehr hörbar. Über der Schmerzgrenze sollte kein Hören, auch nicht kurzfristig, stattfinden. Eine Gefährdung des Gehörs wird durch Schalle, denen das Gehör 8 Stunden pro Tag ausgesetzt ist, schon sehr viel früher erreicht, für mittlere Frequenzen bereits bei 90 dB. Mit dem Ansatz gleicher Leistung kann für kürzere Dauer als 8 Stunden der zulässige Pegel erhöht werden. Schallpegel von 110 dB – wie sie bei Kopfhörerarbeit leicht erreicht werden – sollten demnach nur 1/100 von 480 min, d.h. etwa 5 min lang, angehört werden. Trotzdem wird dieser Wert von vielen jungen Musikhörern, die Kopfhörerwiedergabe bevorzugen, erheblich überschritten. Dies führt zur dauernden Gehörschäden, wie sie leider auch bei uns Studenten häufig beobachtet werden kann. Es soll daher nicht versäumt werden, an dieser Stelle eine deutliche Warnung auszusprechen, insbesondere an solche, die Kopfhörerwiedergabe bevorzugen. In der Hörfläche sind zusätzlich diejenigen Bereiche durch verschiedenartige Schraffur angedeutet, in denen die wesentlichen Komponenten der Sprache bzw. der Musik liegen.

DIN 45 630



Hörschwelle und Kurven gleicher Lautstärkepegel für Sinustöne im freien Schallfeld bei zweiohrigem Hören

In vielen Fällen interessiert nicht der Schallpegel, sondern der Lautstärkepegel. Zu seiner Festlegung bediente man sich der Standardfrequenz 1 kHz und definierte den Lautstärkepegel als den Pegel des gleichlauten 1-kHz-Tones. Zur Unterscheidung erhält der Lautstärkepegel (Symbol  $L_N$ ) die Einheit phon. Der Lautstärkepegel muss also subjektiv durch Lautstärkevergleiche ermittelt werden, die von Versuchspersonen durchgeführt werden. Direkt mit Messinstrumenten lässt sich der Lautstärkepegel nicht bestimmen, mit elektronischen Nachbildungen des Gehörs kann er angenähert werden. Die in der Abbildung dargestellten Kurven gleichen Lautstärkepegels (oder kurz Kurven gleicher Lautstärke) sind Mittelwerte von Aussagen vieler Versuchspersonen. Sie gelten für das ebene Schallfeld. Die unterste Kurve gleicher Lautstärke haben wir schon kennen gelernt. Es ist die Ruheshwelle weil sie für 1 kHz bei + 3 dB und nicht bei 0 dB liegt, trägt sie den Parameterwert  $L_N = 3$  phon. Sie verbindet alle diejenigen Schallpegel in der Hörfläche, die gleich laut sind wie ein 3 dB starker 1-kHz-Ton, d.h. die gerade hörbar sind. Die 40-phon-Kurve ist im wesentlichen parallel gegenüber der 3-phon-Kurve verschoben, steigt jedoch bei tiefen Frequenzen nicht ganz so stark an. Aus ihrem Verlauf kann entnommen werden, dass z.B. ein 50-Hz-Ton einen Pegel von etwa 65 dB besitzen muss, um gleich laut sein wie ein 1 – kHz-Ton mit einem Schallpegel von 40 dB. Ein 50-Hz-Ton mit 40 dB kann nicht auf der 40-phon-Kurve liegen, weil er ja nur gerade wahrnehmbar, also sicher viel leiser ist als ein 40 dB

starker 1-kHz-Ton. Für große Parameterwerte werden die Kurven gleicher Lautstärke nach tiefen Frequenzen hin etwas flacher, nach hohen Frequenzen behalten sie ihre Form im wesentlichen bei.

Der Lautstärkepegel ist ein ungeeignetes Maß für eine quantitative Angabe über die Empfindung der Lautstärke. Die Steigerung von 40 phon auf 60 phon bedeutet nicht etwa eine Steigerung der Empfindung um 50%, sondern – wie Aussagen vieler Versuchspersonen ergeben haben – eine Steigerung um den Faktor 4! Für die Bezifferung des Lautstärkepegels wurde ja auch ein physikalisches Maß, der Schallpegel des gleichlauten 1-kHz-Tones, benutzt. Gesucht wird aber ein Maß für die Empfindung der Lautstärke, die auch als Lautheit bezeichnet wird. Die gesuchte Skala soll Zahlenwerte tragen, welche direkt proportional zur Empfindung, d.h. zur Lautheit sind. Durch subjektive Verhältnismessungen, die von vielen Versuchspersonen durchgeführt wurden, konnten diese Messzahlen in Form der Lautheitskurve gewonnen werden. Sie gibt den Zusammenhang an zwischen dem Lautstärkepegel  $L_N$  in phon (oder auch dem Pegel des 1-kHz-Tones  $L_{1\text{ kHz}}$  in dB) und der Lautheit  $N$  in sone. Für den 1-kHz-Ton mit einem Pegel von 40 dB wurde die Lautheit  $N = 1$  sone festgelegt. Die subjektiven Messungen ergaben, dass eine Pegelsteigerung um 10 dB die Lautheit des 1-kHz-Tones verdoppelt. Nur für Pegelwerte unter etwa 30 dB gilt dieser einfache Zusammenhang nicht mehr. Dort steigt, wie die Abbildung zeigt, die Lautheit steiler an.

Da in sehr vielen Fällen jedoch nur der Bereich über 30 dB bzw. über 0,5 sone wichtig ist, wird das Ergebnis vieler subjektiver Verhältnismessungen häufig in folgender Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{N_{1\text{kHz}}}{\text{sone}} = 2^{((L_{1\text{kHz}} / \text{dB}) - 40) / 10}$$

Die Lautheit ist eine sehr wichtige und auch sehr anschauliche Größe, weil sie Maßzahlen angibt, der Empfindung direkt entsprechen.

17.10.2000

### 1.3. Töne und Klänge

#### Definition zum Hörschall

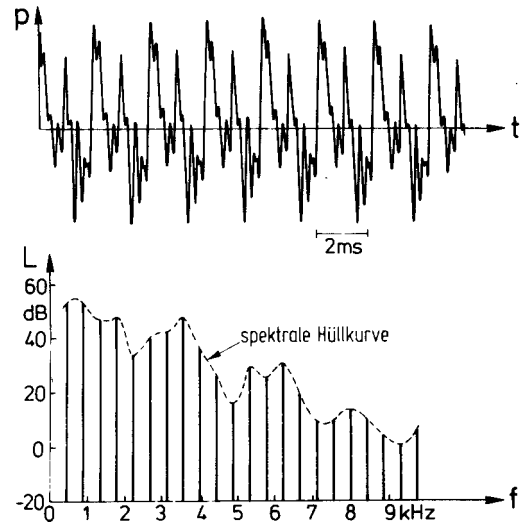
- Reiner Ton  
Sinusförmiger Schall ist ein reiner Ton.
- Ton  
Töne sind im allgemeinen periodische Schalle, die nur eine Tonhöhenempfindung hervorrufen.
- Klang  
Ein Klang setzt aus mindestens zwei Tönen verschiedener Grundfrequenzen zusammen.

Ein Sinuston, auch reiner Ton genannt, kommt in der Natur praktisch nicht vor, er muss elektronisch erzeugt werden. Als Töne im allgemeinen Sinne werden alle periodischen Schalle bezeichnet, die nur eine Tonhöhenempfindung hervorrufen. Die Schalle, die Musikinstrumente erzeugen, sind solche Töne. Der auf einer Oboe gespielte sogenannte "Kammerton" ( $a = 440$  Hz Grundfrequenz) ist ein typisches Beispiel eines Tones. Er setzt sich aus einzelnen Spektrallinien zusammen, deren Frequenzen Vielfache der für die Tonhöhenempfindung maßgeblichen Grundfrequenz (440 Hz) sind. Die einzelnen

Spektrallinien liegen harmonisch zueinander, d.h. sie stehen in einem ganzzahligen Verhältnis. Sie werden als "Harmonische" bezeichnet.

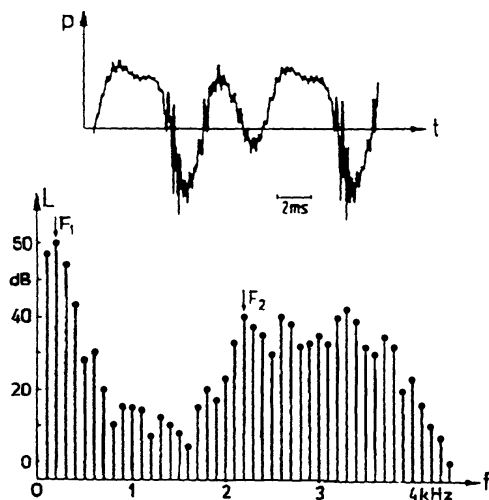
Ein Klang ist aus mindestens 2 Tönen zusammengesetzt, die nicht dieselbe Grundfrequenz besitzen. Im Extremfall kann ein Klang auch aus nur zwei Sinustönen aufgebaut sein. Normalerweise sind Klänge jedoch aus Tönen mit vielen Harmonischen zusammengesetzt, wie sie z.B. von Musikinstrumenten erzeugt werden.

Frequenz $f$	Teiltöne
440 Hz	1. Harmonische (Grundton)
880 Hz	2. Harmonische (Oberton)
1320 Hz	3. Harmonische (Oberton)
1760 Hz	4. Harmonische (Oberton)
2200 Hz	5. Harmonische (Oberton)
2640 Hz	6. Harmonische (Oberton)
3080 Hz	7. Harmonische (Oberton)



**Abbildung 8: Zeitfunktion und Spektrum des Geigentons 'a'**

Die Abbildung zeigt die Zeitfunktion und das Spektrum für einen Geigenton a. Die Grundfrequenz beträgt 440 Hz. Dies ist die tiefste Linie (am weitesten links stehend) im Spektrum, die zu dem Grundton des Geigentones gehört. Die anderen Spektrallinien sind die höheren Harmonischen (Obertöne) des Geigentones. Im Bereich zwischen der sechsten und neunten Harmonischen ist ein Maximum in der spektralen Hüllkurve zu erkennen, das als Formant bezeichnet wird. Die Formanten bestimmen die Klangfarben eines Instrumentes, ihre Lage und Ausprägung ist ein wichtiges Qualitätskriterium.

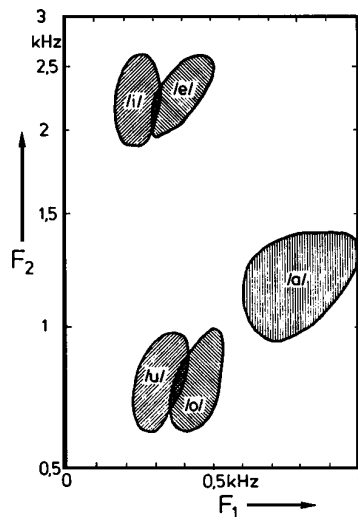


**Abbildung 9: Zeitfunktion und Spektrum eines Vokals "i"**



Bei einem gesungenen oder gesprochenen Sprachlaut ist die Lage der Formanten für die Lautklassifizierung maßgebend. Obige Abbildung zeigt das Spektrum des gesprochenen Vokals "i". Für die Erkennung wichtig sind vor allem der erste (tiefste) und der zweite Formant. Aus der Formantkarte kann die Lage der Formanten weiterer Vokale entnommen werden.

Trotz der großen Zahl von Sinustönen, aus der dieser Vokal zusammengesetzt ist, empfinden wir beim Anhören eine einzige Tonhöhe, die dem Grundton entspricht. Diese Tonhöhe wird auch dann empfunden, wenn der Grundton gar nicht übertragen wird. Beispielsweise überträgt



ein Telefonkanal nur den Frequenzbereich  $0,3 \text{ kHz} \leq f \leq 3,4 \text{ kHz}$ . Die Grundfrequenz einer männlichen Stimme ( $\approx 100 \text{ Hz}$ ) wird somit nicht übertragen. Trotzdem können wir am Telefon einen männlichen von einem weiblichen Sprecher unterscheiden, weil die Grundfrequenz auch im Übertragungsbereich als Frequenzabstand der Teiltöne (Linienabstand) repräsentiert ist. Das Gehör ist in der Lage, aus der Frequenz einzelner Teiltöne den Grundton zu rekonstruieren (virtuelle Tonhöhenempfindung). Dies bedeutet aber nicht, dass tiefe Frequenzen generell nicht übertragen werden müssen: Auch wenn sich bei Unterdrückung des Grundtones die Tonhöhenempfindung praktisch nicht ändert, so ändert sich doch die wahrgenommene Klangfarbe erheblich.

Außer den harmonisch aufgebauten Klängen gibt es die unharmonischen Klänge, bei denen die Frequenz höherer Teiltöne nicht ein ganzzahlig Vielfaches der Grundfrequenz ist. Ein typisches Beispiel für einen solchen Klang ist der Glockenklang. Alle Körper, die nach dem Anschlagen frei ausschlagen können, haben ein mehr oder weniger unharmonisches Spektrum. Auch hier ist es dem Gehör in vielen - aber nicht in allen - Fällen möglich, dem Klang eine einzige virtuelle Tonhöhe zuzuordnen, die aber meist nicht derjenigen des tiefsten Teiltones entspricht.

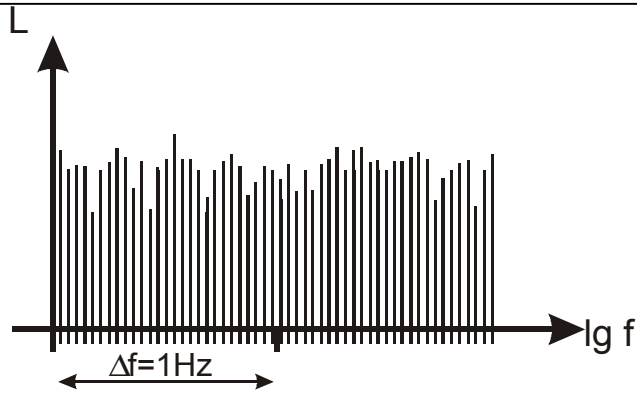
24.10.2000

## 1.4. Rauschen

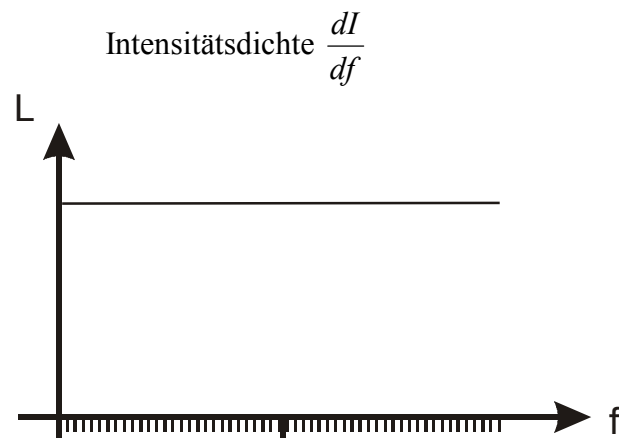
Während Sinustöne und Klänge aus einzelnen Spektrallinien bestehen, gibt es sehr viele Schallereignisse, die kontinuierliche Spektren enthalten. Ein typischer Schall dieser Art ist das Rauschen, das als ständig, aber nicht periodisch verlaufender stochastischer Vorgang mit Hilfe statistischer Kenngrößen beschrieben werden kann. Beispiele für breitbandiges Rauschen sind Ausströmungsgeräusche an Druckluftleitungen oder ein gesprochener f-Laut. Die wichtigste Größe zum Kennzeichnen von Rauschvorgängen ist die (frequenzabhängige) spektrale Schallintensitätsdichte  $dI(f)/df$ . Aus ihr kann der Schallintensitätsdichtepiegel oder kurz der Dichtepiegel  $I(f)$  bestimmt werden.

Rauschen besitzt ein kontinuierliches Spektrum





**Abbildung 10: Intensitätsdichte**



**Abbildung 11: Rauschdichtepegel**

$$\text{Rauschdichtepegel } L(f) = 10 \lg \frac{dI(t)/dt}{I_0/\Delta f} \text{ dB}$$

Der Bezugswert der Schallintensitätsdichte ist die Bezugsintensität  $I_0$  pro Hertz Bandbreite.

Bezug:  $I_0/\Delta f = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}/1\text{Hz}$

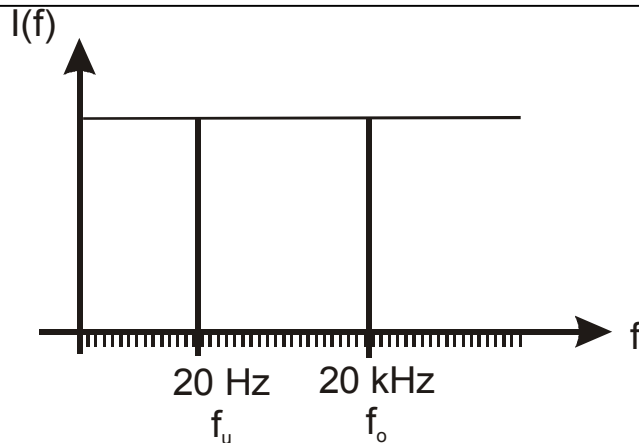
Zu Ermittlung des Dichtepegels kann man sich vorstellen, dass ein durchstimmbares Schmalbandfilter mit 1 Hz Bandbreite vor einen Schallpegelmesser geschaltet wird. Damit kann - in Abhängigkeit von der Mittenfrequenz des Bandfilters - der Dichtepegel des Schallsignales gemessen werden.

### Weißes Rauschen

In der Signaltheorie versteht man unter „weißem Rauschen“ ein stochastischen Signal mit konstantem Dichtepegel im Frequenzbereich von  $f=0$  bis  $f=\infty$ , in der Akustik 4Dekaden von 20 Hz bis 20kHz. Der Dichtepegel von weißem Rauschen wird mit  $L_{wR}$  bezeichnet.

Betrachtet man einen gewissen Frequenzbereich, so spricht man von der Gesamtintensität  $I$

$$I = \int_{f_u}^{f_o} \frac{dI(f)}{df} df$$

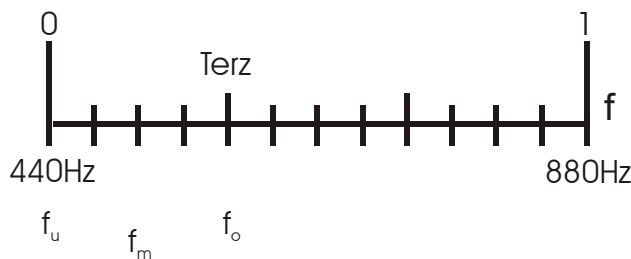


**Abbildung 12: Gesamtschalintensität**

für weißes Rauschen gilt:

$$I_{wR} = \int_{f_u}^{f_o} L_{wR} df = L_{wR} [f]_{f_u}^{f_o} = L_{wR} (f_o - f_u)$$

Neben Bandfiltern mit konstanter absoluter Bandbreite (z. B. 100 Hz) werden in der akustischen Messtechnik aber auch Bandfilter mit konstanter relativer Bandbreite (z. B. Terz) verwendet. Bei einem Terzfilter stehen die Grenzfrequenzen in dem festen Verhältnis  $f_o/f_u = 2^{1/3}/1 = 1,26$ . Die Bandbreite  $\Delta f = f_o - f_u$  ergibt sich aus der Filtermittenfrequenz  $f_m = (f_u \cdot f_o)^{1/2}$ .



**Abbildung 13: Terzfilter**

$$\log_2 \frac{f}{f_0} = lb \frac{f}{f_0} \text{ mit } f_0 = 440\text{Hz}$$

für ein Terzfilter gilt:  $\frac{f_o}{f_u} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2} = 1,26$  harmonisch  $\frac{f_o}{f_u} = 5 : 4 = 1,25$

$$f_m = \sqrt{f_u \cdot f_o}$$

$$\Delta f_{Terz} = f_o - f_u = \left( \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) f_m \approx 0,23 f_m$$

Im Bereich zwischen 20Hz und 20kHz gibt es 30 Terzen.

Wird Weißes Rauschen mit Filtern konstanter relativer Bandbreite gemessen, so erhält man wegen des Zusammenhanges  $\Delta f - f_m$  keine frequenzunabhängige Filterausgangsspannung. Beim Durchstimmen nimmt bei einem Terzfilter vielmehr der Ausgangspegel mit 10 dB/Dekade zu: Die Bandbreite einer Terz bei 1 kHz ist zehnmal so groß wie die Bandbreite einer Terz bei 100 Hz. Folglich fällt bei Weißem Rauschen in die 1-kHz-Terz die zehnfache Leistung, was einer Pegelzunahme um 10 dB entspricht. Um bei Messungen mit Filtern

konstanter relativer Bandbreite einen frequenzunabhängigen Pegelverlauf zu erreichen, muss folglich ein Rauschen verwendet werden, dessen Dichtepegel  $L_{RR}$  zu hohen Frequenzen hin mit 10 dB/Dekade abnimmt. Dieses Rauschen wird als "Rosa Rauschen" bezeichnet.

Weißes Rauschen mit Terzfilter gemessen ergibt einen Pegelanstieg von 10dB/Dekade

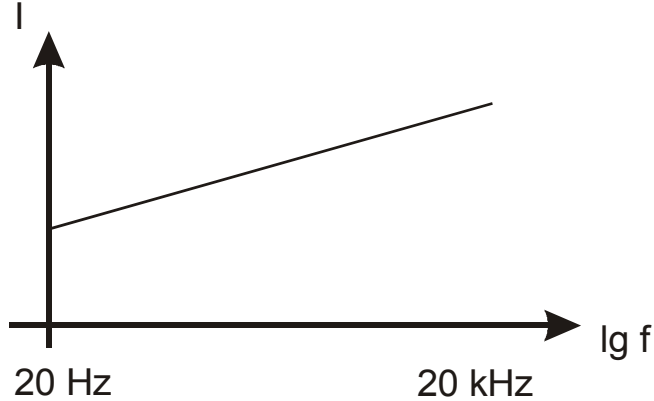


Abbildung 14: Weißes Rauschen

Rosa Rauschen (Pink Noise)

Bei Rosa Rauschen sinkt der Dichtepegel mit 10dB/Dakade so dass der Intensitätspegel über einer logarithmierten Terzskala eine konstante Waagerechte ergibt.

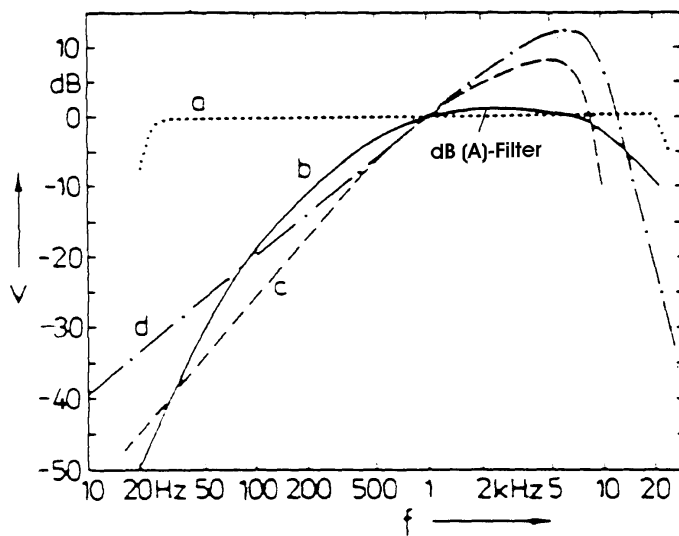
Schmalbandrauschen (SBR)

Vom Schmalbandrauschen spricht man, wenn die Bandbreite des Rauschens klein ist gegen die Mittenfrequenz:  $f_m > f_o - f_u$

Zusammenschaltung von Rauschquellen

Leistung	$P_{ges} = P_1 + P_2$	Intensität	$I_{ges} = I_1 + I_2$ inkohärente Signale <sup>2</sup>
Druck	$p_{ges} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$	Spannung	$U_{ges} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$
Pegel	$L_{ges} = 10 \lg \left( \sum_i \frac{I_i}{I_0} \right) dB$		

<sup>2</sup> inkohärent (lat.) statistisch unabhängig, unzusammenhängend



**Abbildung 15: Frequenzbewertung bei der Messung von "Fremdspannung"**

Frequenzbewertung bei der Messung von "Fremdspannung"

- (a) DIN 45405 von bewerteter Störspannung
- (b) DIN 45633 von A-bewerteter Störspannung
- (c) DIN 45405 (1967) von Geräuschspannung nach alter Art
- (d) DIN 45405 (1983) von Geräuschspannung nach neuerer Art

Zur Frequenzbewertung von Geräuschen sind einige Frequenzgänge genormt. Alle Filterkurven entstanden mit dem Ziel, eine subjektive, gehörrichtige Signalbewertung nachzubilden. Zumeist stellt diese Nachbildung jedoch nur eine grobe Näherung dar.

Bei der Messung mit Rauschsignalen sind Bandfilter mit speziellen Bandbreiten und Mittenfrequenzen genormt. Obere und untere Grenzfrequenz stehen entweder im Verhältnis einer Terz (1,26:1) oder eine Oktav (2:1), seltener einer Halboktav (1,41:1). Die Mittenfrequenzen betragen bei einem Terzfilter  $(1; 1,25; 1,6; 2,0; 2,5; 3,15; 4,0; 5,0; 6,3; 8 \text{ kHz}) \cdot 10^n$ ;  $n = -2, -1, 0, +1$ . Für das Oktavfilter werden jeweils drei Terzen zusammengefasst.

## 1.5. Ultraschall, Hyperschall

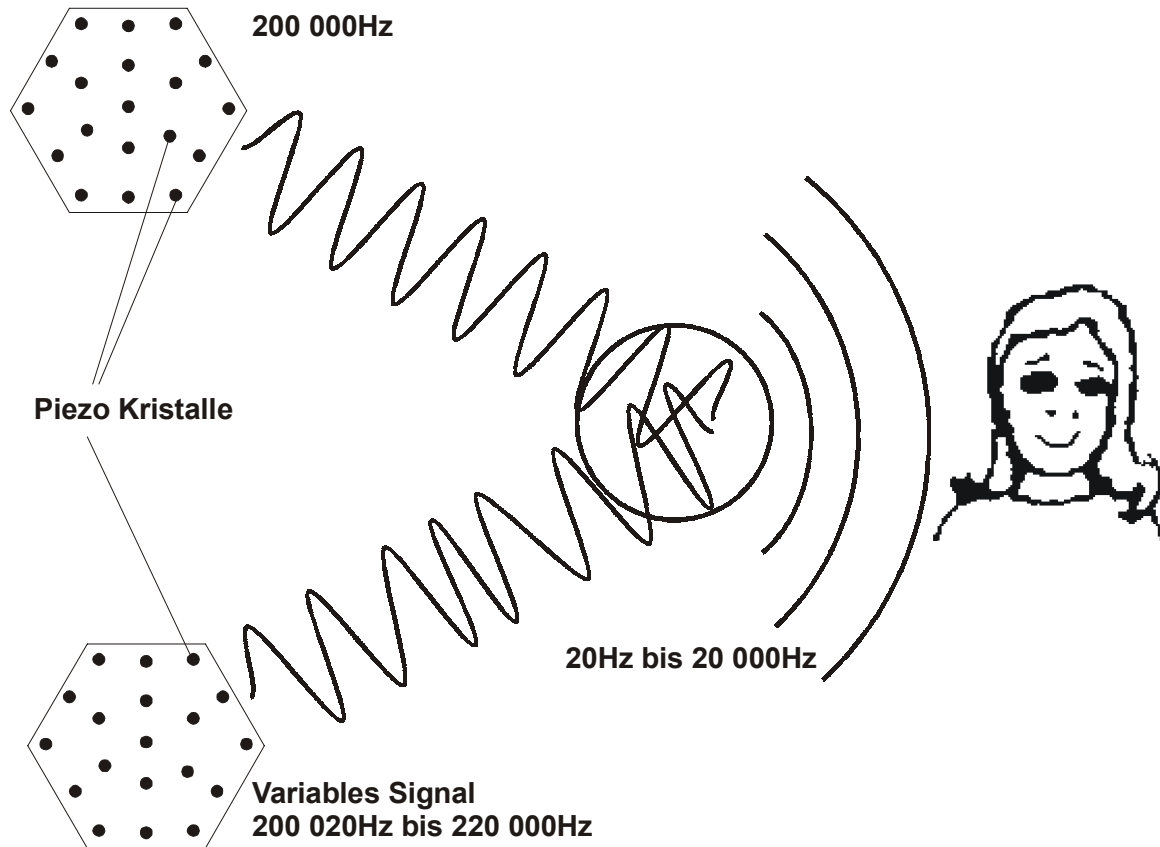
### 1.5.1 Ultraschall

Ultraschall ca. 20kHz – 100kHz

Im Bereich von 10kHz bis 100kHz, also im Bereich von Hochtonlautsprechern gibt es noch einige andere Möglichkeiten wie:

- Piezoschwinger
- den Plasmalautsprecher oder das Ionophon
- sogenannte tönende Lichtbogen (der schon seit 1818 bekannt ist)

Beim Plasmalautsprecher wird eine hochfrequente Glimmentladung bewegt, die wiederum mit der Tonfrequenz moduliert wird. Da man außer der Ionengaswolke sonst keine Masse bewegt, erreicht man damit sehr gute Hochtongigenschaften. Nachteilig ist der zusätzliche technische Aufwand als dem Beispiel bei einem elektrostatischen Hochtonglautsprecher.

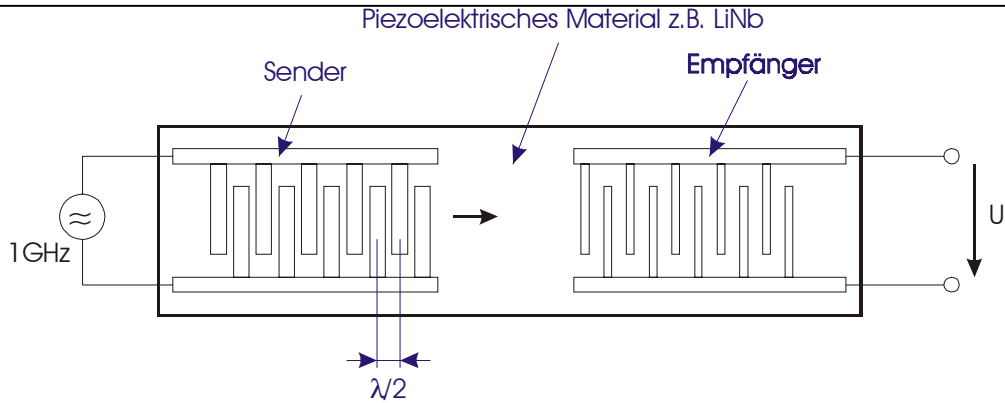


**Abbildung 16: Zielgerichteter Schall**

Eine Anwendung des Ultraschall könnte folgende werden. Der US-Erfinder Elwood G. Norris hat einen elektroakustischen Wandler aus 19 piezoelektrischen Kristallen konstruiert. Diese schwingen viele tausend Male schneller als eine herkömmliche Membran. Die Grundfrequenz der Piezos liegt bei 200 kHz. Diese hochfrequenten Ultraschallwellen liegen deutlich außerhalb der menschlichen Wahrnehmung. Eine zweite variable Frequenz die zwischen 200 020 Hz und 220 000 Hz liegt wird nun der vorhergehenden überlagert. Die Differenz ist nun im Wahrnehmungsbereich. Da sich Ultraschallwellen geradlinig wie ein Laser ausbreiten und nicht wie membranerzeugte Schallwellen sich im Raum überschneiden, ist es theoretisch möglich Schall mitten in einem Raum zu projizieren.

### **1.5.2 Hyperschall**

Hyperschallwellen lassen sich technisch einfach auf piezoelektrischen Materialien erzeugen. Und zwar als Oberflächenwellen die man auch Rayleighwellen nennt.



**Abbildung 17: Hyperschallerzeugung**

Schallgeschwindigkeit in LiNb

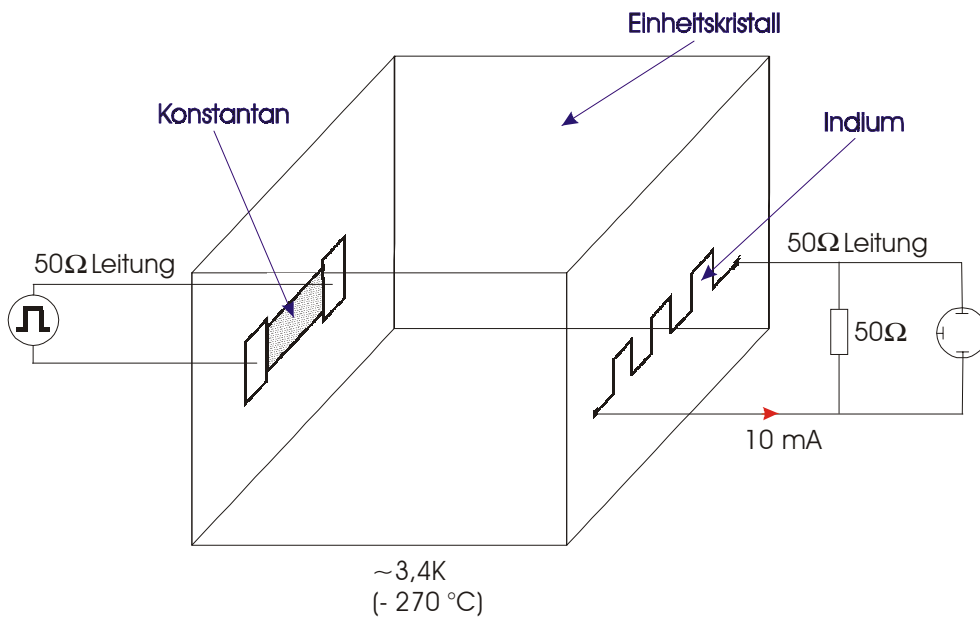
$$c_{(LiNb)} \approx 3500 \frac{m}{s} \quad \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3500 \frac{m}{s}}{2 \cdot 1GHz} = 1,75 \mu m$$

Dämpfung in LiNb

$$a = 10 \frac{dB}{cm}$$

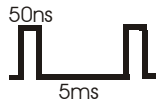
Eine weitere Möglichkeit der Hyperschallerzeugung geht über den Weg der thermischen Schockwellen. Wärme entsteht ja in Festkörpern durch die Schwingung von Atomen. Diese Bewegung ist unregelmäßig oder statistisch verteilt und lässt sich als Rauschen hörbar machen. Wenn man gezielt thermische Schallwellen erzeugt so begibt man sich in die Nähe des absoluten Nullpunktes bei dem keine thermische Schwingung bzw. kein Rauschen mehr vorliegt.

Im Weltraum hört man nichts, auch wenn das in SiFi-Filmen immer wieder so scheint.

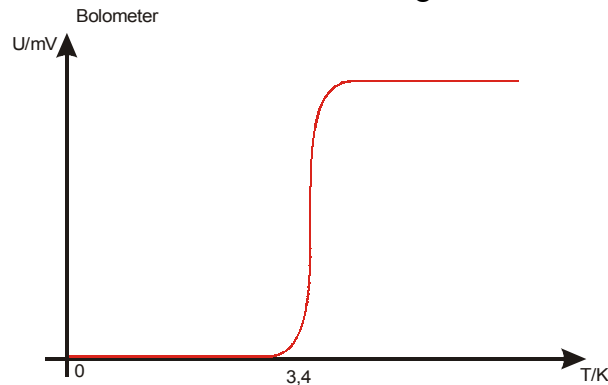


**Abbildung 18: Einheitskristall**

Dazu benutzt man einen reinen Einheitskristall (Sphir). Einheitskristall deshalb, damit die Schallwellen nicht an Fehlstellen gestaut werden. An einem Kopfende dampft man einen Konstantanwiderstandsfilm mit versilberten Elektroden auf. Diesen benutzt man im Prinzip als Heizdraht. Da der Film sehr dünn ist, ist auch die Temperaturänderung sehr schnell ( $\tau \approx 10\text{ns}$ ). Man kann so Impulse ca. 50ns Breite erzeugen. Die Temperaturerhöhung stellt dabei ja nichts anderes als das Anstoßen der Atome dar und damit das Erzeugen einer Schallschwingung bzw. einer Schallwelle.



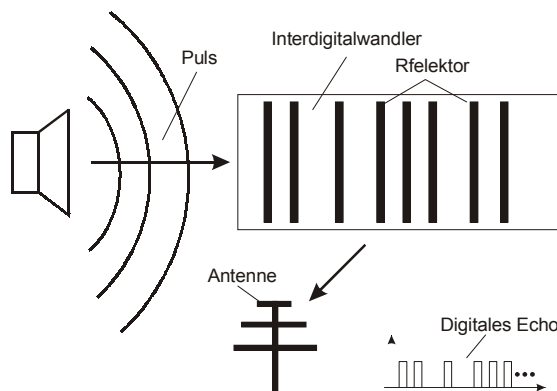
Nun wie gelangt dieser Nachweiß dieser Schallwellen? Ganz einfach mit einem Bolometer. Es handelt sich hierbei um ein Widerstandsthermometer, das man im Übergangsbereich von Supraleitung in den Normalleitenden Bereich einsetzen kann.



Das Maximum der Spektralen Leistungsdichte liegt bei etwa 800GHz bei einer zugeführten Leistung von 10W/mm<sup>2</sup> und 10K Temperaturänderung.

Noch höhere Frequenzen erzeugt man Tunnelkontakten damit gelangt man in den Terabereich. Bei etwa 10<sup>10</sup> Hz ist die absolute Frequenzgrenze, weil man dann in den Bereich von Atomabständen gelangt. Oder anders ausgedrückt bei Wellenlängenabständen in denen man nur noch auf materielle Leerräume trifft, kann man nichts zu Schwingungen anregen und somit auch keinen Schall erzeugen. An dieser Stelle sei nochmals auf Literatur hingewiesen werden : Meyer Neumann Kapitel 10

Ein Anwendungsfeld ist z.B. der Oberflächenwellen-Sensor. Oberflächenwellen-Sensoren besteht aus einem piezoelektrischen Einkristall, auf dessen Oberflächen sich Kammartige, ineinandergreifende Mikrostrukturen befinden. Dieser sogenannte Interdigitalwandler ist die Schnittstelle zwischen verschiedenen Wellenformen. Zunächst empfängt er über eine Antenne einen kurzen elektrischen Puls vom Abfragegerät. Das elektrische Feld ruft im piezoelektrischen Substrat eine mechanische Verzerrung hervor, die sich als akustische Welle mit einer Geschwindigkeit von rund 500m/s auf der Oberfläche des Kristalls ausbreitet. Auf der Oberfläche befindet sich außerdem eine Reihe von Reflektoren, die wie die Striche eines

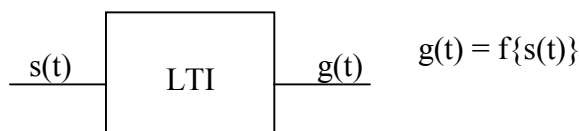


Barcodes angeordnet sind. Jeder gesetzte Reflektor entspricht einem Bit mit dem Wert 1, eine Lücke codiert eine 0. An jedem Reflektor wird ein winziger Bruchteil der akustischen Welle reflektiert. Nun wird der Interdigitalwandler in umgekehrter Richtung tätig: Er wandelt die nacheinander eintreffenden Echos der akustischen Welle in Folge elektrischer Signale um, die dann von der Antenne abgestrahlt werden. Anhand des zeitlichen Abstands der Signale kann das Lesegerät nun das von Sensor zu Sensor

verschiedene binäre Muster rekonstruieren. Bei 32Bit gibt es  $2^{32}$  also rund 4,3 Milliarden verschiedene Möglichkeiten. Ein Vorteil ist der Sensor benötigt auch keine Energieversorgung.

Diese Technik wird bereits in Norwegen eingesetzt zur Autobahnmautregestrierung. Dort sind 200 000 Autos mit diesem Sensor Ausgestattet. Der Fahrer muss nicht einmal anhalten. Wird nicht nur die Intensität der Signale gemessen sondern auch der Phasenwinkel, ist auch eine Geschwindigkeitsmessung möglich, da der Dopplereffekt zu einer geschwindigkeitsabhängigen Phasenverschiebung des Signals führt. Bei einer Übertragungsfrequenz von rund 1GHz und einer mittleren Sendeleistung von 20mW dürfen Lesegerät und Oberflächensensor allerdings nicht mehr als 10m voneinander entfernt sein. Die Reichweite wird vor allem durch die geringe Sendeleistung des passiven Sensors begrenzt mit der er auf den Abfrageimpuls antwortet.

## 2. Signaltheorie



LTI-System (linear time invariant)

Linear  $f\{\sum_i s_i(t)\} = \sum_i g_i(t)$

Ein System verhält sich linear, wenn die Antwort  $g(t)$  auf eine Summe von Eingangssignalen  $s_i(t)$  gleich ist der Summe der Einzelantworten  $g_i(t)$ .

Time Invariant  $f\{\sum_i s_i(t - t_0)\} = \sum_i g_i(t - t_0)$

Ein System ist zeitinvariant, wenn die Antwort  $g(t)$  eines zeitverzögerten Signals  $s(t-t_0)$  der zeitverzögerten Antwort  $g(t-t_0)$  entspricht.

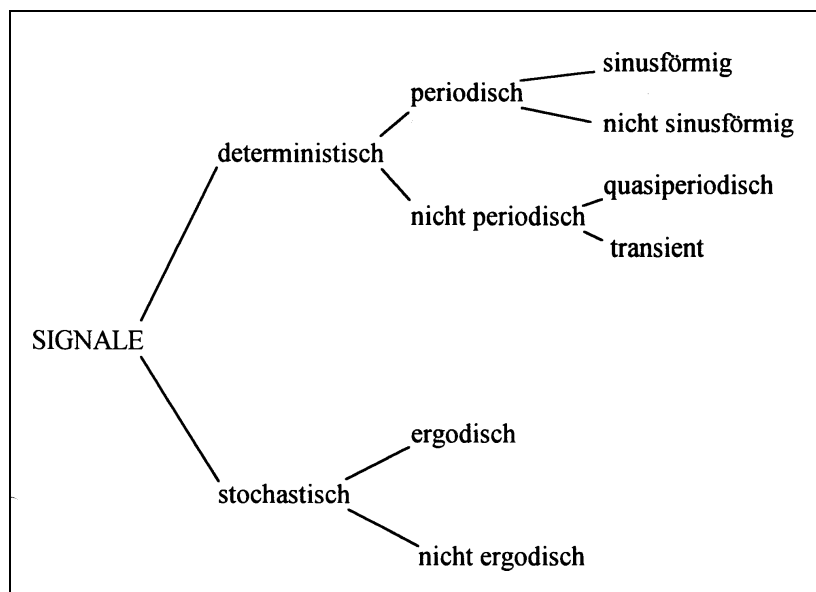


Abbildung 19: Signalarten

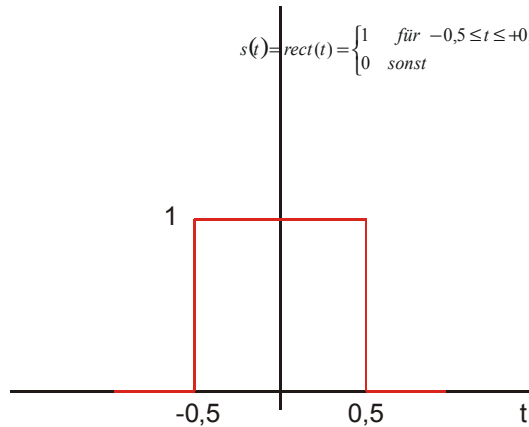


## 2.1. Elementarsignale

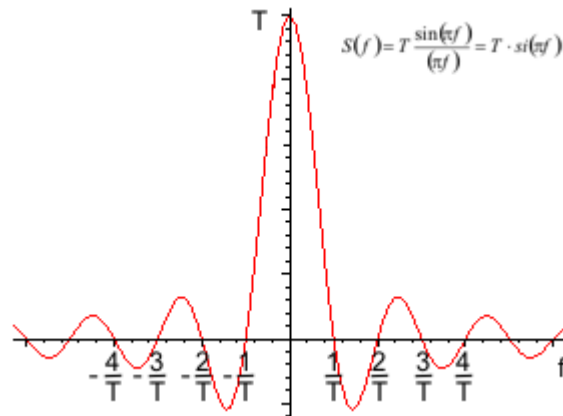
Rechtecksignal:

$$s(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -0,5 \leq t \leq +0,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -0,5 \leq t \leq +0,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



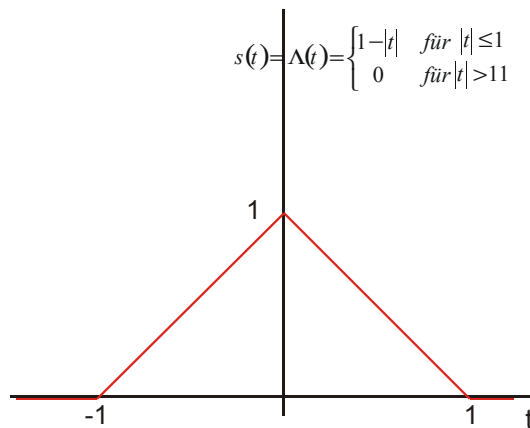
$$S(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)} = T \cdot \text{si}(\pi f T)$$



Dreiecksignal:

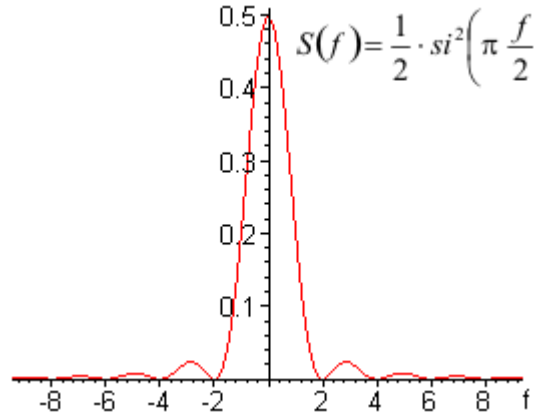
$$s(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

$$s(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$





$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\pi \frac{f}{2}\right)$$

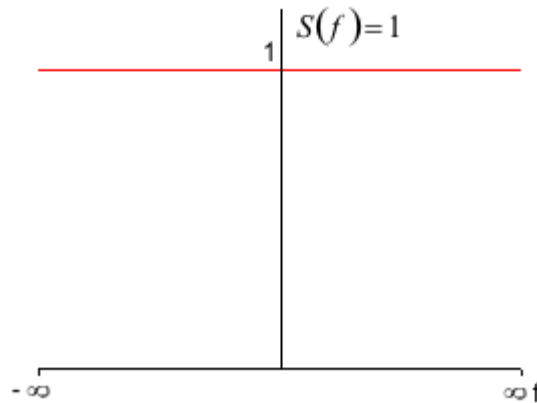


Diracstoß:

$$s(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

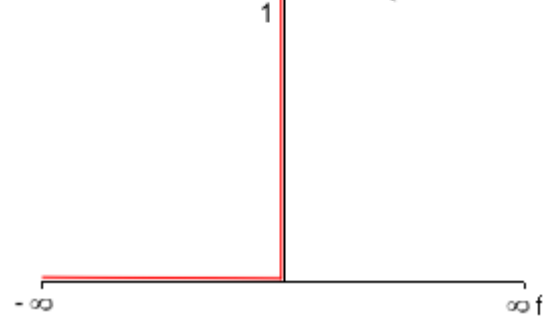
Fläche des Diracstoßes  
(Gewicht) = 1

$$s(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } |t| > 0 \end{cases}$$



$S(f) = 1$   
Sprungsignal:

$$s(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

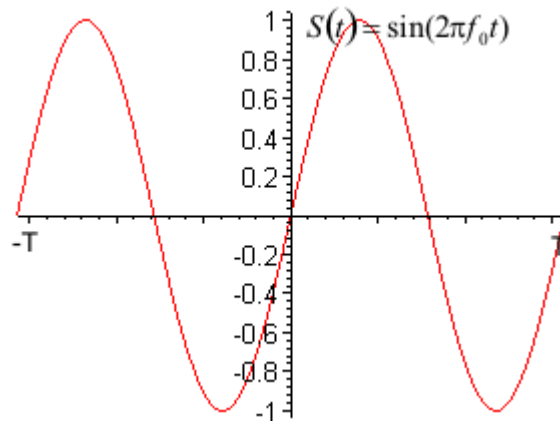


$$s(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$S(f) = \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$$

(reel nicht Darstellbar)

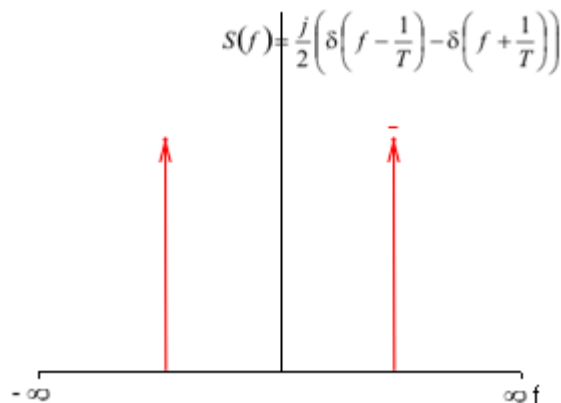
Sinussignal:



$$s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$S(f) = \frac{j}{2} \left( \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{T}\right) \right)$$

(reel nicht Darstellbar)



Imaginärteil dargestellt:

**ES FEHLEN NOCH SIGNALE z.B.: F{SRUNG}; GAUß; F{GAUß}**

## 2.2. Systembetrachtung, Fouriertransformation

Theoreme der Fourier-Transformation;

Theorem	$s(t)$	$S(f)$
$\mathcal{F}$ -Transformation	$s(t)$	$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$
inverse $\mathcal{F}$ -Transformation	$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft} dt$	$S(f)$
Zerlegung reeler Zeitfunktionen	$s(t) = s_g(t) + s_u(t)$	$S(f) = \text{Re}\{S(f)\} + j\text{Im}\{S(f)\}$
mit	$s_g(t)$	$\text{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_g(t)\cos(2\pi ft) dt$
	$s_u(t)$	$j\text{Im}\{S(f)\} = -j \int_{-\infty}^{+\infty} s_u(t)\sin(2\pi ft) dt$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$ , bei reellen Zeitfunktionen auch $s^*(f)$
Konjugiert komplexe Zeitfunktionen	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Symmetrie	$S(t)$	$s(-f)$
Faltung	$s_1(t) * s_2(t)$	$s_1(f) \cdot s_2(f)$
Multiplikation	$s_1(f) \cdot s_2(f)$	$s_1(t) * s_2(t)$
Superposition	$\sum_i a_i s_i(t)$	$\sum_i a_i S_i(f)$
Ähnlichkeit	$s(bt)$	$\frac{1}{ b } S\left(\frac{f}{b}\right)$
Verschiebung	$s(t-t_0)$	$S(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$(j2\pi f)^n \cdot S(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(0)\delta(f)$
	$\frac{1}{b} s\left(\frac{t}{b}\right)$	$S(bf)$
Phasenverschiebung	$s(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$S(f-f_0)$

## 2.3. Kettenschaltung, Faltung im Zeitbereich

**FEHLT NOCH KOMPLETT 21.11.2000**

## **2.4. Multiplikation von Signalen, Faltung im Frequenzbereich**

**FEHLT NOCH KOMPLETT 21.11.2000 u. 12.12.2000**

### **2.5 Laplacetransformation, Z-Transformation**

Zusammenhang zwischen Fourier-, Laplace- und z-Transformation

Die Signaltheorie befaßt sich mit der mathematischen Beschreibung von Signalen und zwar im Zeitbereich und im Frequenzbereich oder allgemeiner ausgedrückt im Zeitbereich und einem Bildbereich. Beide Bereiche sind immer physikalisch äquivalent.

Bei komplexen Aufgabenstellungen ergeben sich oft jedoch Vorteile bei der Berechnung im Bildbereich. Bestimmte Eigenschaften lassen sich einfacher erklären. Die Behandlung von Filtern und Reglern lassen sich elegant mathematisch darstellen.

Da Digitalrechner heute kostengünstig zur Verfügung stehen, sind deshalb auch Signalgeneratoren, Filter und Regler "smart" darstellbar.

Die einfachste Transformation ist die Darstellung periodischer Funktion durch die Fourierreihe, daß heißt durch die Darstellung einer Summe von harmonischen Cosinus- und Sinusfunktionen.

Für transiente Signale ( Impulse) geht man über zum Fourier-Integral.

Aus dem Linienspektrum im Frequenzbereich wird dann im allgemeinen ein Frequenzdichtespektrum.

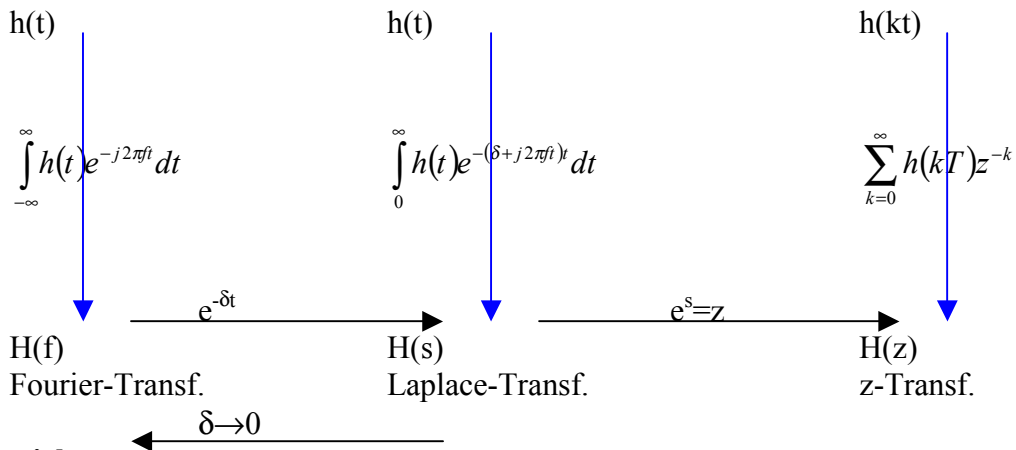
Um das Fourierintegral lösen zu können, müssen bestimmte mathematische Voraussetzungen erfüllt sein. Unter anderem muss die Fläche unter  $s(t)$  einen endlichen Wert annehmen, konvergieren. Ist dies nicht der Fall (zum Beispiel  $s(t) = t^2$ ) bedient man sich der Laplace-Transformation.

Hierbei wird folgender Trick angewandt: Man multipliziert die Zeitfunktion zunächst mit der stark konvergierenden  $e^{-\delta t}$ -Funktion. Nach erfolgreicher Transformation kann man dann durch den Grenzübergang von  $\delta \rightarrow 0$  wieder zum Fourierspektrum gelangen.

Eine weitere nützliche Transformation ist die sogenannte z-Transformation. Hierbei substituiert man  $e^{-sT}$  durch  $z^{-1}$ . Ein Vorteil der z-Transformation ist in vielen Fällen wiederum die einfachere mathematische Darstellung.

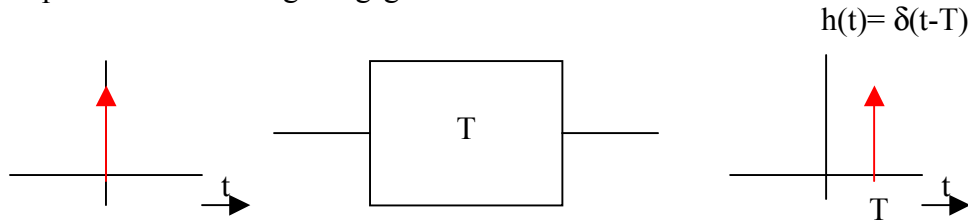
Ein anderer Vorteil der z-Transformation liegt in der physikalischen Bedeutung beim Einsatz getakteter Digitalrechner, die im "zeitdiskreten" Bereich arbeiten.  $z^{-1}$  bedeutet die Verzögerung um die Rechnertaktzeit des Prozessors (minimal).

**Originalbereich**



**Bildbereich**

Beispiel: Ideales Verzögerungsglied



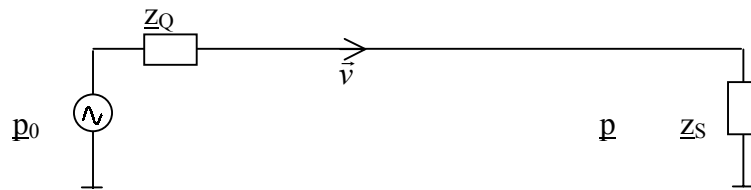
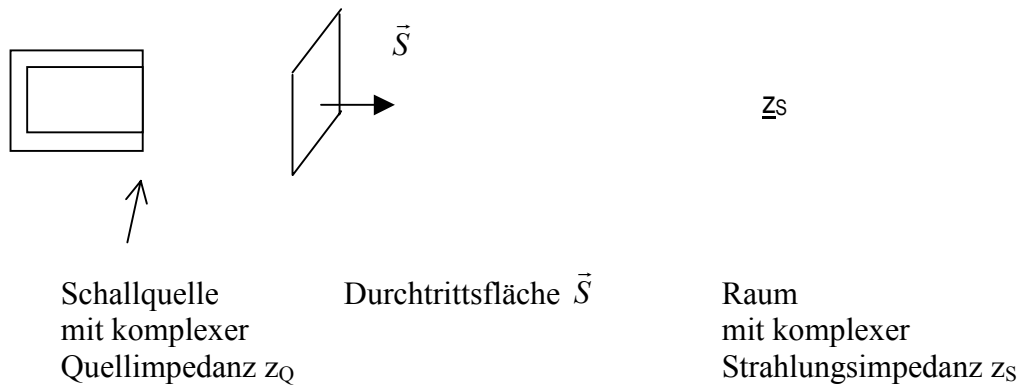
Fouriertransformierte der Stoßantwort:  $H(f) = 1 e^{-j2\pi ft}$   
 Laplacetransformierte:  $H(s) = 1 e^{-sT}$   
 z-Transformierte:  $H(z) = z^{-1} = \text{Output} / \text{Input}$

**FEHLT NOCH KOMPLETT 9.1.2001 u. 23.1.2000**

### 3. Schallwellen und Schallfelder

#### 3.0.1. Allgemeines

Unter Schallabstrahlung versteht man den Übertritt von einem Medium in ein anderes. Die Grenzfläche kann dabei als Schallquelle betrachtet werden. Eine Grenzfläche kann auch die Austrittsfläche eines Schalltrichters sein (Trompete). Diese bildet die Grenzfläche zwischen ortsgebundener Schallenergie und sich frei ausbreitender Energie:



Analogien zu Wechselstromgrößen der Nachrichtentechnik  
Voraussetzung: Periodische Signale, Lineare Systeme (Schalldruckpegel < 140dB)

Druck	entspricht	Spannung
Schnelle	entspricht	Strom
Quellimpedanz	entspricht	Innenwiderstand der Spannungsquelle
Strahlungsimpedanz	entspricht	Abschlusswiderstand (Wellenwiderstand)

Daraus folgt:

$$z_S = \frac{p}{\vec{v}}$$

Für die Schallfeldimpedanz (Strahlungsimpedanz) in freien Luftraum gilt:

$$z_S = z_0 = 414 \text{ Nsm}^{-3}$$

Von der Bedeutung her vergleichbar mit dem Wellenwiderstand des Vakuums für elektromagnetische Wellen ( $z_0 = 377\Omega$ )

Weitere Analogie

Akustische Wirkleistung:  $P = \operatorname{Re}\{\underline{p}\vec{v}\vec{S}\}$

Elektrische Wirkleistung:  $P = \operatorname{Re}\{\underline{U}\underline{I}\}$

### **3.0.2. Grundgleichungen akustischer Wellenausbreitung**

Voraussetzung: kleine Wechseldruckänderungen im Vergleich zum statischen Druck

Kleine Druckänderungen  $\Delta p$  erfolgen proportional zu Dichteänderungen  $\Delta \rho$ , die Proportionalitätskonstante ist das Quadrat der Schallgeschwindigkeit:

#### **1. Grundgleichung**

$$p_{\approx} = c^2 \rho_{\approx}$$



## 2.Grundgleichung (Eulersche Bewegungsgleichung)

$$-grad(p) = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{mit } \rho = \text{statische Dichte}$$

Räumliche Druckänderung ist proportional zur zeitlichen Schnelleänderung

$$grad = \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Der Gradient einer skalaren} \\ \text{Größe ist ein Vektor und zeigt in} \\ \text{Richtung der stärksten Abnahme} \\ \text{(hier Druckgefälle)} \\ \nabla = \text{Nablaoperator} \end{array}$$

Zur Ableitung der Eulerschen Grundgleichung

nach Newton:

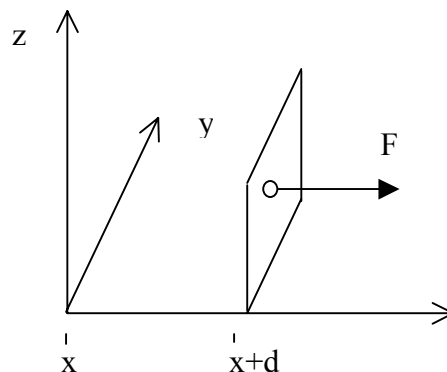
$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad p \cdot \vec{S} = \rho V \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Übergang zu differentiellen Größen:

$$-dp = \rho \cdot dx \cdot \frac{dv}{dt}$$

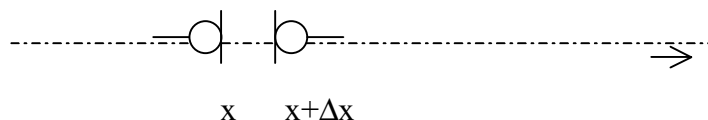
$$-dp \cdot dydz = \rho \cdot dx dy dz \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \cdot \frac{dv}{dt}$$



Das Minuszeichen erklärt sich aus der Beschleunigung in Richtung der Druckabnahme.

Ein sogenanntes Schnellmikrofon ist ein Gradientenmikrofon, dabei wird in möglichst geringem Abstand die Druckdifferenz mit zwei Druckmikrofonen gemessen:



$$grad p \approx \left( \frac{p(x) - p(x + \Delta x)}{\Delta x} \right)$$

Da die Schnelle ein Vektor ist, misst ein Gradientenmikrofon richtungsabhängig!

### 3. Grundgleichung (Wellendifferentialgleichung)

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} \\ \frac{d^2}{dy^2} \\ \frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta = \text{Laplaceoperator, hier} \\ \text{angewendet auf den Skalar } p \text{ in} \\ \text{kartesischen Koordinaten} \\ \\ \Delta = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}p) \end{array}$$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

(Herleitung siehe Zollner/Zwicker Elektroakustik Seite 51)

Materialgleichungen

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho} \quad \text{mit } c = \text{Schallgeschwindigkeit}$$

Druck  $\sim$  Dichte

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \quad \text{für Gase} \quad \kappa = \text{Adiabatenkonstante} = 1,4 \text{ für Luft}$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad \text{für Flüssigkeiten mit } K = \text{Kompressionsmodul}$$

Lösungen der Wellendifferentialgleichungen:

#### 3.1. Ebene Welle

Die ebene Welle ist ein Modell unter möglichst einfachen Randbedingungen. Damit kann man einige Phänomäne der Schallausbreitung – z. B. die Brechung von Schallwellen - erklären und man kann die Wellendifferentialgleichung leicht lösen.

Annahmen:

1. Schwingungen nur in x-Richtung:  $p = p(x,t)$
2. keine Reibungsverluste
3. lineare Überlagerung von Teilchenschwingungen

Partikuläre Lösung der Wellendifferentialgleichung:

$$p(x, t) = \hat{p} \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]$$

↑

+ für Ausbreitung in negative x-Richtung  
- für Ausbreitung in positiver x-Richtung

Komplexe Schreibweise:  $p(x, t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{p}e^{j(\omega t + \varphi)}e^{\pm j\omega\frac{x}{c}}\right\}$

Mit der Wellenzahl  $k$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und

$$\underline{p} = \hat{p}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$p(x, t) = \operatorname{Re}\{\underline{p}e^{\pm jkx}\}$$

Wie bei der komplexen Wechselstromrechnung ergänzt man virtuell um den Imaginärteil, um zu einer einfacheren Schreibweise und zur Möglichkeit der Rechnung mit komplexen Zeigern zu gelangen:

$$\underline{p}(x, t) = \underline{p}e^{\pm jkx} \quad \text{Gleichung der „ebenen Welle“ in komplexer Schreibweise}$$

Im Gegensatz zur komplexen Wechselstromrechnung wird bei der komplexen Betrachtung akustischer Größen der Scheitelwert als Betrag des komplexen Zeigers verwendet. Hinzu kommt neben der zeitlichen Phasenlage auch die vom Ort abhängige Phasenlage ( $kx$ ).

Diskussion der „ebenen Welle“:

$$\hat{p} \neq f(x) \quad \text{Amplitude der ebenen Welle = konstant}$$

Das Verhältnis von Druck und Schnelle ist ebenfalls unabhängig vom Ort konstant:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \frac{dv}{dt}$$

Für die Schnelle lässt sich die gleiche komplexe Schreibweise herleiten wie für den Druck

$$-\frac{d(\hat{p}e^{j\varphi}e^{j\omega t}e^{-jkx})}{dx} = \rho \frac{d(\hat{v}e^{j\varphi}e^{j\omega t}e^{-jkx})}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$--jk(\hat{p}e^{j\varphi}e^{j\omega t}e^{-jkx}) = \rho j\omega(\hat{v}e^{j\varphi}e^{j\omega t}e^{-jkx}) \quad \Rightarrow$$

$$k\underline{p} = \rho\omega\underline{v} \quad \text{mit } k = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{c}\underline{p} = \rho\omega\underline{v} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p}{v} = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho \cdot c \Rightarrow$$

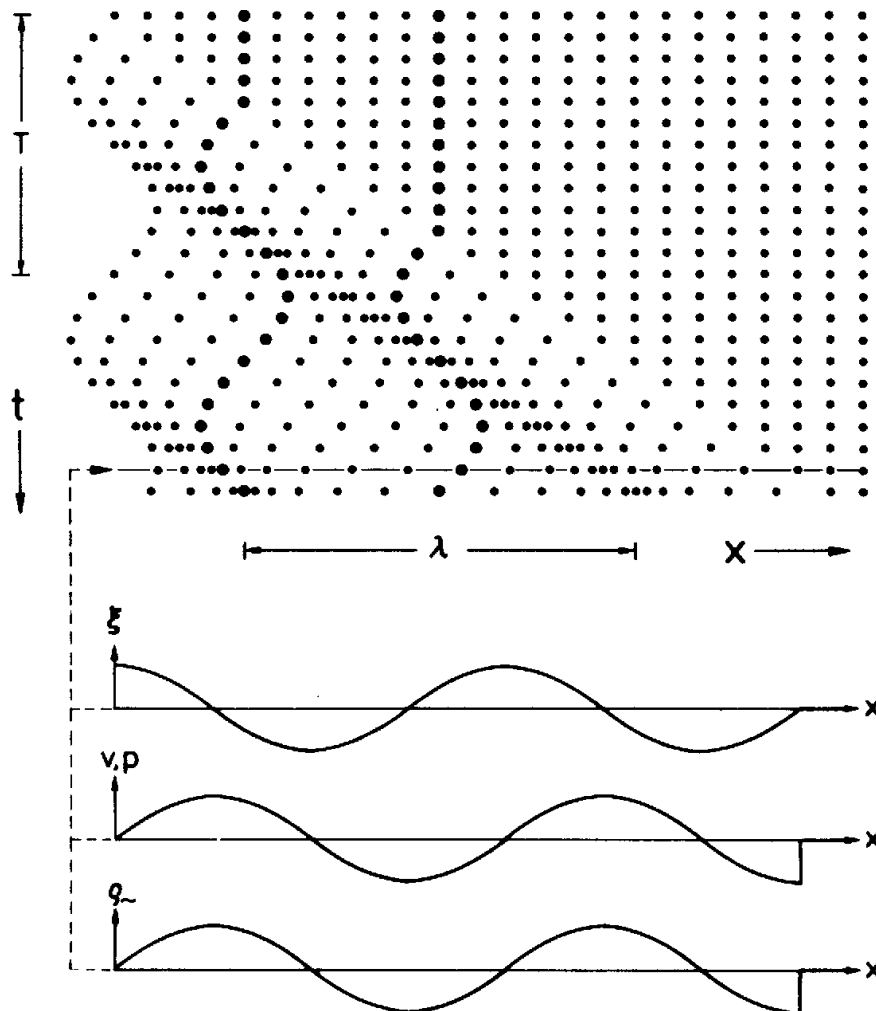
$$\frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho \cdot c = z_s = konst.$$

⇒ Die Strahlungsimpedanz  $z_s$  ist bei der ebenen Welle eine reelle Konstante.

Für Luft gilt

$$Z_s = Z_0 = \rho_L c_L = 414 \frac{Ns}{m^3}$$

Die Phasenverschiebung zwischen  $p$  und  $v$  ist Null.



Die Grafik symbolisiert die Ausbreitung einer ebenen harmonischen Welle. Die Punkte sind zum Beispiel Gasmoleküle. In der ersten Reihe sind alle Moleküle in Ruhelage. In der zweiten Reihe wird das erste Teilchen angestoßen, in der dritten Reihe das erste und zweite Teilchen. Mit zunehmender Zeit breitet sich die sinusförmige Anregung immer weiter in  $x$ -Richtung aus. Ein einzelnes Teilchen schwingt dabei sinusförmig um sein Ruhelage.

Die Duckwelle wird erkennbar aus den entstehenden Dichtemaxima und –minima.

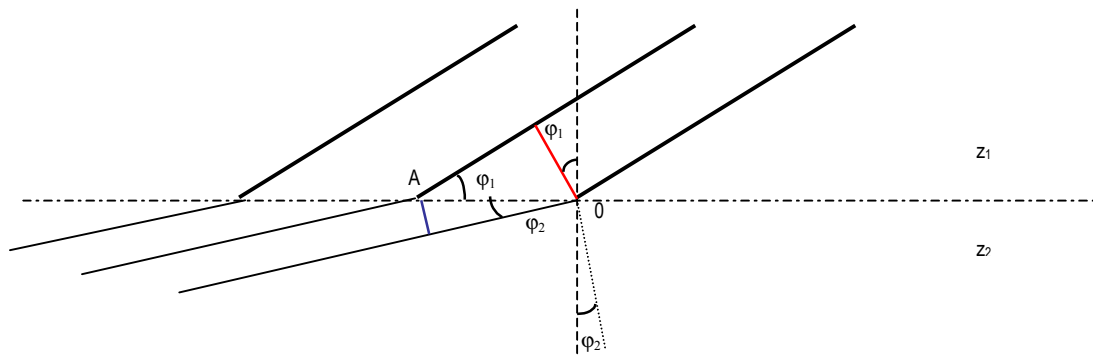
Hierbei handelt es sich um Longitudinalwellen (Längswellen). Wellen, bei denen die Schwingungsrichtung (bzw. die Richtung des Schwingungsvektors) mit der Ausbreitungsrichtung übereinstimmt (z.B. Schallwellen).

Die Funktionsgraphen stellen die Ortsabhängigkeit der Teilchenauslenkung  $s(x)$ , der Schnelle  $v(x)$  bzw. des Drucks  $p(x)$  und der Dichte  $\rho(x)$  dar (ohne Gleichanteile).

### 3.1.1. Die Brechung akustischer Wellen

Wie bei optischen Wellen existiert auch für akustische Wellen das Phänomen der Brechung. Das heißt, es kommt zur Ablenkung von der Ausbreitungsrichtung. Bei optischen Wellen ist dies der Fall, wenn eine Lichtwelle auf ein Material mit anderem Brechungsindex trifft. Ursache der Brechung sind sowohl bei der optischen als auch der akustischen Welle die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $c$  der Wellen in den unterschiedlichen Materialien.

In der folgenden Skizze soll dies erläutert werden. Die Dichte- bzw. Druckmaxima einer Wellenfront sind als parallele Geraden und die Grenze zwischen zwei Medien als strichpunktierte Linie gezeichnet. Das Lot auf die Grenzfläche wird durch eine gestrichelte Linie dargestellt:



Die Zeit zwischen zwei Maxima ist die Periodendauer  $T$ , sie ist in beiden Materialien gleich groß. Die Wegstrecke die im Material 1 in dieser Zeit zurückgelegt wird beträgt:

$$\lambda_1 = T \cdot c_1 \quad (\text{rote Linie})$$

In der gleichen Zeit legt die Welle im Material 2 den Weg

$$\lambda_2 = T \cdot c_2 \quad (\text{blaue Linie})$$

zurück. Wobei  $c_1$  und  $c_2$  die Schallgeschwindigkeiten in den Materialien 1 und 2 sind.

Die Wegstrecken lassen sich auch über den Sinus der Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ausdrücken. ( $\varphi_1$  ist der Einfallswinkel,  $\varphi_2$  der Ausfallswinkel (oder umgekehrt))



$$\sin \varphi_1 = \frac{T \cdot c_1}{AO} \quad \sin \varphi_2 = \frac{T \cdot c_2}{AO}$$

Daraus folgt das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{T \cdot c_1}{T \cdot c_2} \cdot \frac{AO}{AO} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Damit ein möglichst großer Teil einer Welle in ein Material eindringen kann, muss Anpassung vorliegen, also :

$$z_1 \approx z_2$$

$$\rho_1 c_1 \approx \rho_2 c_2$$

Auch bei den akustischen Wellen kann man einen Winkel für die Totalreflexion berechnen.  $\varphi_1$  ist dann  $90^\circ$  und  $\sin \varphi_1 = 1$

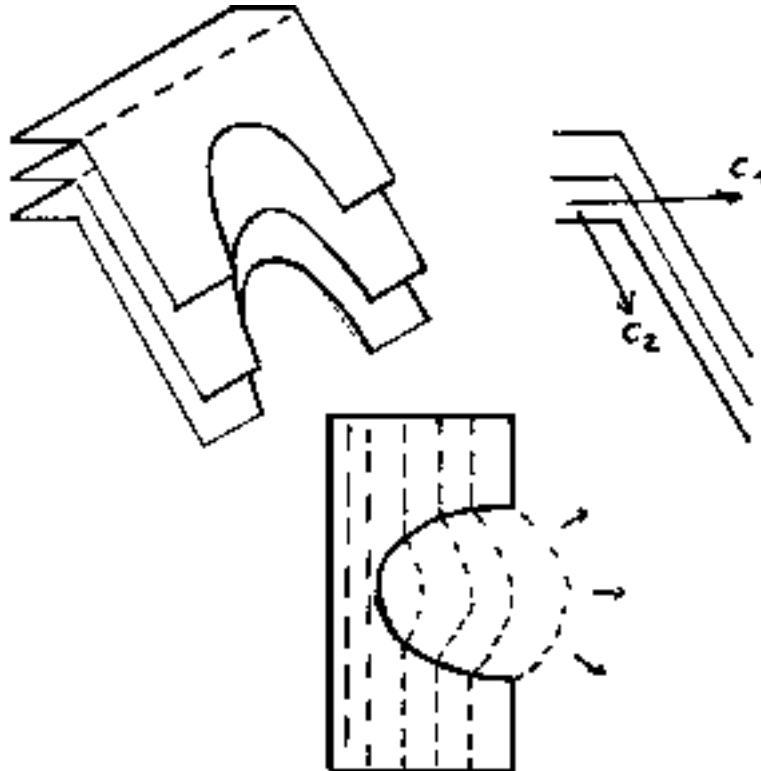
$$\sin \varphi_2 = \frac{c_2}{c_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{c_2}{c_1}$$

Die Totalreflexion findet man entlang von runden Wänden (Radius  $> \lambda$ ) z. B. in der St. Pauls Cathedral (London). Flüstert man dort in der runden Kuppel im flachen Winkel zur Wand, so kann dies auch auf der gegenüberliegenden Seite von einem Zuhörer gut verstanden werden. Durch die Totalreflexion an der Wand wird die Welle „geführt“.

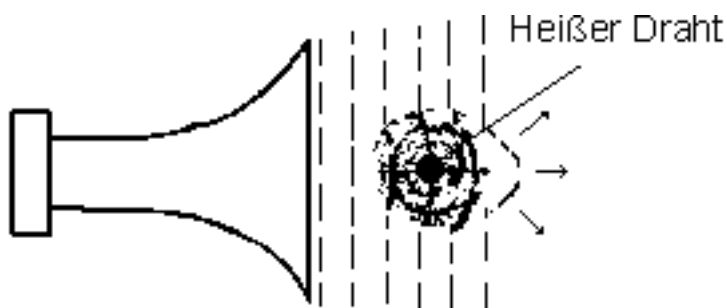
### 3.1.1 Akustische Linsen

Vor Hochtonlautsprechern werden oft akustische Linsen gesetzt, um deren starke Richtwirkung aufzuheben.

Bei der Fächerlinse werden die Wellenfronten auf Umwege gelenkt, so dass sich effektiv verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten für verschiedene Richtungen ergeben.



Beim Einsatz eines heißen Drahtes vor z. B. einem Hornstrahler werden die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten verschieden heißer Luftschichten ausgenutzt.



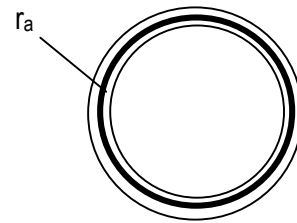
$$c_{Luft}(T) = 331,3 \text{ms}^{-1} \sqrt{\frac{T + 273^\circ\text{C}}{273^\circ\text{C}}}$$

T / °C	c /ms <sup>-1</sup>
0	331,3
20	343
100	387
400	520

### 3.2. Kugelwelle, Punktquelle

Beispiel: Harmonisch schwingende Ballonfläche mit dem Radius  $r_a$ :

$$r = r_a(1 + m \sin \omega t) \quad \text{mit } m \ll 1$$



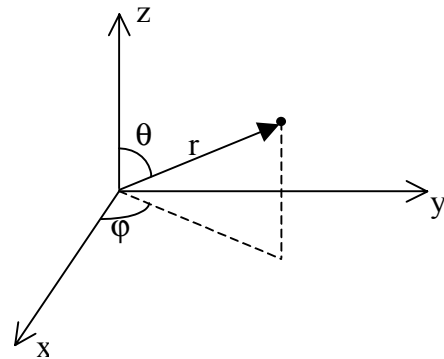
→ Flächen gleichen Schalldruckes sind Kugelflächen

→ Flächen gleicher Schnelle gibt es nicht mehr! Warum?  
(Vektorrichtungen sind unterschiedlich)

→ Flächen gleicher Schnellebeträge sind Kugelflächen.

Die Behandlung von kugelsymmetrischen physikalischen Phänomenen gelingt mathematisch am einfachsten, wenn man Kugelkoordinaten verwendet.

Kugelkoordinaten: Ein Punkt im Raum wird durch die Koordinaten  $(r, \varphi, \theta)$  gegeben.  
 $r$  = Radius = Abstand des Punktes zum Koordinatenursprung  
 $\varphi$  = Lateralwinkel<sup>3</sup> = Winkel in der Waagerechten  
 $\theta$  = Höhenwinkel



Bei einer Kugelwelle existieren keine Abhängigkeiten des Drucks von den Winkeln  $\varphi$  und  $\theta$ , die Wellendifferentialgleichung lautet bei der Anwendung von Kugelkoordinaten deshalb:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2\partial p}{r\partial r} = -\frac{\omega^2}{c^2} p = -k^2 p$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist die Wellengleichung der Kugelwelle. Hier die Lösung in komplexer Form:

$$\underline{p}(r, t) = \hat{p}_a \frac{r_a}{r} e^{j(\omega t + \varphi - kr)}$$

oder

$$\underline{p}(r, t) = \underline{p}_a \frac{r_a}{r} e^{-jkr}$$

Die Amplitude der Welle insgesamt

<sup>3</sup> lateral (lat.) fachsprachlich für seitlich



Es gibt nur Abhängigkeiten von  $r$ .

Aus der Lösung der 2. Grundgleichung

$$-\text{grad}(p) = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

folgt für die Schnelle

$$\vec{v} = \underline{p}(r, t) \left( \frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega r} \right) \vec{e}_r \quad \text{mit } \vec{e}_r \text{ als Einheitsvektor in Richtung von } r$$

und für den Betrag des Schnellevektors

$$v(r, t) = \underline{p}(r, t) \left( \frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega r} \right)$$

In der komplexen Wechselstromrechnung ergibt das Verhältnis von Spannung zu Strom den komplexen Widerstand  $\underline{z}$ . Mit der Analogie von Druck = Spannung und Schnelle = Strom ergibt sich auch hier aus dem Verhältnis von Druck zu Schnelle der komplexe Strahlungswiderstand  $\underline{z}_K$  der Kugelwelle:

$$\frac{p}{v} = \underline{z}_K = \frac{1}{\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega r}}$$

Wir erinnern uns, bei der ebenen Welle war der Strahlungswiderstand eine reelle Konstante. Bei der Kugelwelle ist der Strahlungswiderstand komplex ( $j$  im Nenner) und radiusabhängig.

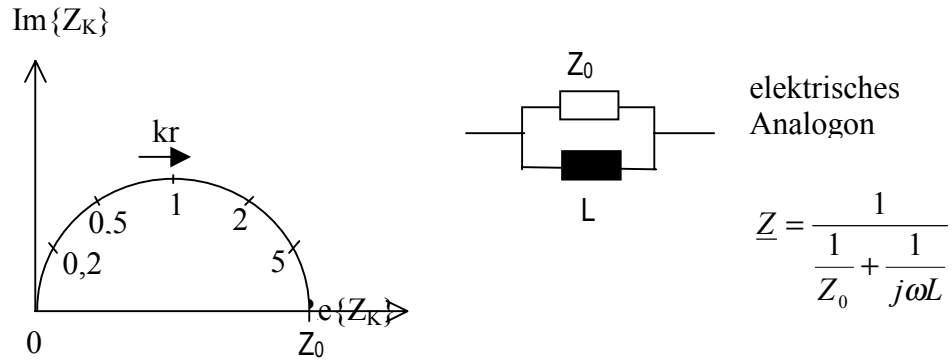
Für die Ausbreitung der Kugelwelle in Luft gilt (mit  $Z_0 = \rho_L c_L$ ):

$$\underline{z}_K = \frac{1}{\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega r}} = \frac{\rho c}{1 + \frac{\rho c}{j\omega r}} = \frac{Z_0}{1 + \frac{1}{jkr}} = \frac{Z_0}{1 - j(1/kr)}$$

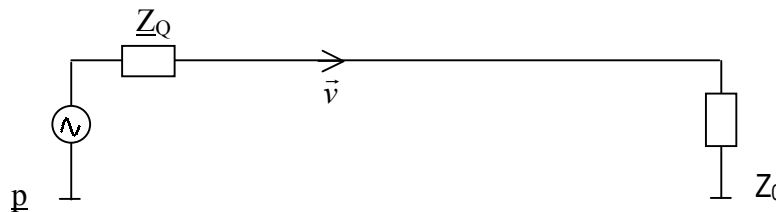
Die Strahlungsimpedanz lässt sich auch als Ortskurve darstellen. In der Nachrichtentechnik wählt man als Parameter für Ortskurven oft die Kreisfrequenz  $\omega$ , hier wählt man das Produkt aus Wellenzahl  $k$  und Radius  $r$  als Parameter.

$$kr = \frac{\omega r}{c} = \frac{2\pi f r}{c} = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

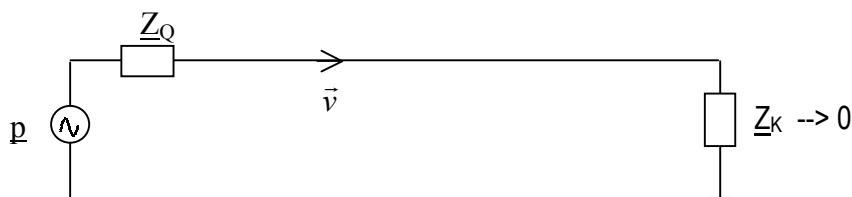
Großes  $kr$  bedeutet, dass der Abstand  $r$  groß ist im Vergleich zur Wellenlänge.



Ein gutes Beispiel für einen Kugelstrahler stellt der sogenannte Plasmahochtöner (Magnat) dar. Dabei wird eine ionisierte kugelförmige Gaswolke zu Schwingungen angeregt. Dieses System funktioniert bei hohen Frequenzen ( $kr$  groß) sehr gut. Der Schall wird nach allen Seiten gleichmäßig abgestrahlt. Betrachtet man die Ortskurve, heißt das, dass die abgestrahlte Kugelwelle den Strahlungswiderstand  $Z_0$  „sieht.“



Würde man tiefe Frequenzen ( $kr$  klein) auf den Plasmahochtöner bringen, so nähert man sich für die Strahlungsimpedanz  $Z_K$  dem Wert 0. Es liegt dann totale Fehlanpassung vor, die Schallquelle wird kurzgeschlossen, die Schallenergie wird in der Quellimpedanz  $Z_Q$  verbraucht.



Als Kugelwellengrenzfrequenz  $f_K$  bezeichnet man die Frequenz, bei der  $\text{Re}\{Z_K\} = \text{Im}\{Z_K\}$ . Dies ist der Fall bei  $kr=1$  bzw.

$$f_K = \frac{c}{2\pi r}$$

Die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle beträgt dann gerade  $45^\circ$ . Man spricht deshalb auch von der  $45^\circ$ -Frequenz.

Allgemein berechnet sich die Phase aus :

$$\varphi_K = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}_K\}}{\operatorname{Re}\{\underline{Z}_K\}} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{1-j/kr}\right\}}{\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-j/kr}\right\}}$$

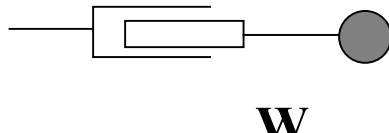
$$\frac{1}{1-j/kr} = \frac{1+j/kr}{1+(\frac{1}{kr})^2} = \frac{1}{1+(\frac{1}{kr})^2} + j \frac{1/kr}{1+(\frac{1}{kr})^2}$$

$$\varphi_K = \arctan(1/kr)$$

## Zusammenfassung der Eigenschaften der Kugelwelle

1. Druckamplitude  $\sim 1/r$
2.  $kr \gg 1$      $\underline{Z}_K \rightarrow \underline{Z}_0$     (Schwingungsradius  $r \gg$  Wellenlänge  $\lambda$ )
3.  $kr \ll 1$      $\underline{Z}_K \rightarrow 0$     (Schwingungsradius  $r \ll$  Wellenlänge  $\lambda$ )

Zur Kugelwellenausbreitung in Luft kann man auch ein rein mechanisches Analogon rechnen, welches aus einem Reibwiderstand  $W$  und einer schwingenden Masse  $m$  besteht.



Reibungskraft = Reibwiderstand  $\cdot$  Geschwindigkeit  $F = W \cdot v$

Beschleunigungskraft = Masse  $\cdot$  Beschleunigung  $F = m \frac{dv}{dt}$

von der Geschwindigkeit  $v$  werden nur Beträge des Vektors in radialer Richtung betrachtet

$$\underline{v} = \hat{v} e^{j(\omega t + \varphi - kr)} \quad \frac{dv}{dt} = j\omega \underline{v}$$

In der Mechanik bestimmt man die komplexen mechanischen Impedanzen

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = W \quad \text{für den Reibwiderstand}$$

$$\underline{Z}_m = \frac{F}{\underline{v}} = j\omega m \quad \text{für die schwingende Masse}$$

und für die Gesamtimpedanz

$$\underline{Z}_G = \frac{1}{1/Z_W} + \frac{1}{1/\underline{Z}_m} = \frac{1}{\frac{1}{W} + \frac{1}{j\omega m}}$$

Betrachtet man die Admittanz als Kehrwert der Impedanz, so kann man sich einen Bruchstrich sparen:

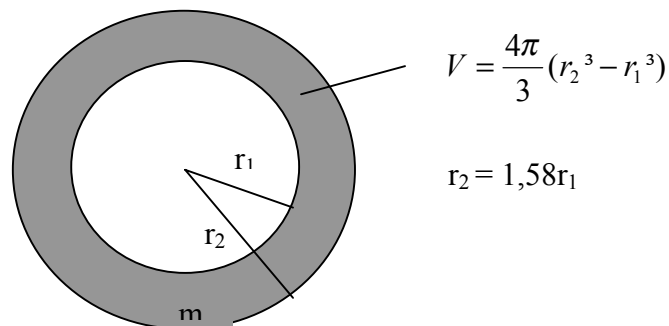
$$\underline{Y}_G = \frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{W} + \frac{1}{j\omega m} = \frac{\underline{v}}{F} = \frac{\underline{v}}{p \cdot S} \quad S = \text{Kugeloberfläche} = 4\pi r^2$$

Diese Gesamtadmittanz lässt sich mit der Kugelwelle vergleichen

$$\underline{Y}_K = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{j\omega \rho r} = \frac{\underline{v}}{p}$$

$$\Rightarrow \quad W = \rho c \cdot S = Z_0 \cdot 4\pi r^2 \quad m = \rho r \cdot S = \rho \cdot 4\pi r^3$$

Anschaulich bedeutet dies eine „atmende“ Kugel oder eine Kugelschale mit den Radien  $r$  und  $1,58r$



Die Radien sind so gewählt, weil dann die Masse  $m$  mit der aus o.g. Gleichung übereinstimmt ( $4^{1/3}=1,58$ ).

Dieses mechanische Ersatzbild dient wie das elektrische Ersatzschaltbild nur der anschaulichen Erklärung des Schwingungsverhaltens. Der mechanische Reibwiderstand würde Wärme erzeugen. Bei der Schallabstrahlung haben wir an keiner Stelle Reibungsverluste in Betracht gezogen. Der reelle Widerstand  $Z_0$  ist als Wellenwiderstand zu verstehen.

So wie die ebene Welle ist auch die Kugelwelle zunächst nur ein theoretisches Modell, mit dem man jedoch eine Reihe von Phänomenen näherungsweise gut beschreiben kann. Zum Beispiel verhält sich ein kleiner Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse für Frequenzen

kleiner 550Hz in ausreichendem Abstand wie ein Kugelstrahler. Für höhere Frequenzen und kleine Abstände zur Membran muss man exaktere Modelle verwenden, wie die der Kolben- oder Trichtermembran.

### 3.3. Zylinderwelle

**DATEI VON PROF. BABIEL FEHLT**

### 3.4. Linienquelle

**FEHLT**

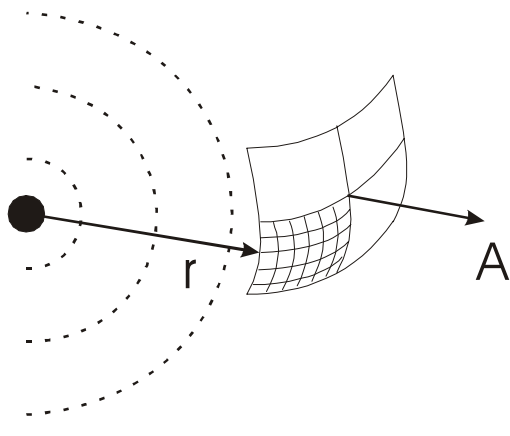
### 3.5. Richtgrößen

#### Schalleistung und Intensität

Im elektrischen Fall ist die Leistung eine bekannte Messgröße.  $P=UI$ , wobei  $U$  und  $I$  Effektivwerte oder Gleichstromwerte sind und mit  $P$  ist eigentlich der Mittelwert  $\bar{P}$  gemeint ist.

Bei der Schallausbreitung definiert man auch die auf die Fläche bezogen Leistung, weil zum Beispiel bei einer punktförmigen Quelle die Leistung an jedem Punkt im Raum konstant bleibt, die Intensität jedoch mit  $\frac{1}{r^2}$  abnimmt.

$$p = \text{konst.} = \oint_A \vec{I} \cdot d\vec{A}$$



#### Schalleistung und Intensität der ebenen Welle

Ebene Welle bedeutet:  $p$  und  $v$  in Phase zu  $z$  reell

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} &= p_{\text{eff}} \cdot v_{\text{eff}} = I \\ \bar{p} &= \bar{I} \cdot A = p \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{vereinbarungsgemäß bei sinusförmiger} \\ \text{Anregung} \end{array} \quad (\text{harmonischer})$$

Betrachtet man nur die zeitlichen Abhängigkeiten, gilt bei der ebenen Welle

$$p(t) = \hat{p} \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{2} \cdot p_{\text{eff}} \cdot \sin(\omega t) \quad v(t) = \hat{v} \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{2} \cdot v_{\text{eff}} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{A}{T} \int_0^T \hat{p} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{v}_x \cdot \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \cdot \hat{p} \cdot \hat{v}_x \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}_x}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}_x}{2} \left[ t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right]_0^T \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}_x}{2} \cdot T \\ &= A \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{v}_x}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\bar{P} = A \cdot p_{\text{eff}} \cdot v_{\text{xeff}}$$

$$I = p_{\text{eff}} \cdot v_{\text{xeff}} = \frac{P_{\text{eff}}^2}{Z_0}$$

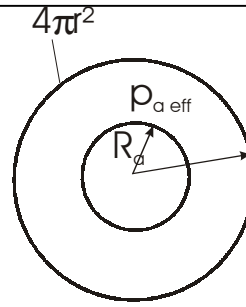
## Leistungsbetrachtung bei der Kugelwelle

$$p(r, t) = \hat{p}_a \frac{r_a}{r} \sin(\omega t - kr)$$

$$v(r, t) = \frac{p(r, t)}{z} = \hat{p}_a \frac{r_a}{r} \sin(\omega t - kr - \varphi_k)$$

...aus der Integration folgt analog

$$\begin{aligned}\bar{P}_k &= A \cdot p_{\text{eff}}(r) \cdot v_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_k(r)) \\ &= p_{\text{eff}}^2(r) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_k} \right\} \\ \bar{P}_k &= 4\pi r^2 p_{a\text{eff}}^2 \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\rho c} - \frac{j}{\rho \omega r} \right\} \\ P_k &= 4\pi r^2 \left( p_{a\text{eff}} \frac{r_a}{r} \right)^2 \frac{1}{Z_0} \\ P_k &= 4\pi \cdot p_{a\text{eff}}^2 r_a^2 \frac{1}{Z_0}\end{aligned}$$



Bei verlustfreier Wellenausbreitung ist die Leistung  $P_k$  auf jeder Kugeloberfläche mit beliebigem  $r$  die gleiche. (Energieerhaltung)

## Ergiebigkeit $Q$

Elektrisches Analogon zur Ergiebigkeit ist die elektrische Ladung.

$$Q = \oint \vec{v}(r, t) d\vec{A}$$

für die Kugelwelle gilt:  $Q = \underline{v}(r) 4\pi r^2$

für die Kugelwelle mit harmonischer Erregung an der Stelle  $r=r_a$  mit  $\underline{p}_a$  und  $\underline{v}_a$

$$\underline{v}(r_a) = \frac{Q}{4\pi r_a^2}$$

Eine Kugelwelle mit  $k r_a \ll 1$  bzw.  $\frac{2\pi \cdot r_a}{\lambda} \ll 1$  bezeichnet man als Punktquelle.

Für die Punktquelle gilt:

$$Z_k = Z_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{jkr_a}} \approx Z_0 jkr_a = jkr_a Z_0$$

allgemein gilt für Kugelwelle:

$$\underline{p}(r) = \hat{p}_a \frac{r_a}{r} e^{+j(\omega t - kr)} = \underline{p}_a \frac{r_a}{r} e^{-jkr}$$

mit  $\underline{p}_a = \underline{v}_a \cdot Z_k(r_a)$



$$\underline{p}(r) = \underline{v}_a \cdot Z_k(r_a) \frac{r_a}{r} e^{-jkr}$$

für Punktquelle

$$\underline{p}(r) = \frac{Q}{4\pi r_a^2} jkr_a Z_0 \frac{r_a}{r} e^{-jkr} = \frac{jkZ_0}{4\pi r} Q e^{-jkr} = j \frac{Z_0}{2\lambda r} Q e^{-jkr}$$

**AB HIER FEHLT NOCH ALLES**

### **3.6. Dipolstrahler**

### **3.7. Schwingende Platte**

#### **3.7.1. Kolbenmembran**

#### **3.7.2. Konusmembran**